

ФЕДЕРАЛЬНО ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
НАУКИ
ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОФИЗИКИ УРАЛЬСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

БЕЛЯЕВ МАРК АЛЕКСАНДРОВИЧ

**Конические структуры на поверхности жидкости с ионной
проводимостью в электрическом поле с учетом влияния объемного и
поверхностного зарядов**

01.04.13 – Электрофизика, электрофизические установки

Научно-квалификационная работа

Научный руководитель:
Чл.-корр. РАН, д.ф.-м.н.
Н.М. Зубарев

Екатеринбург
2021

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1. Обзор литературы.....	6
2. Конические образования на поверхности жидкости с ионной проводимостью.....	11
2.1 Основные уравнения.....	11
2.2 Точное автомодельное решение.....	16
2.3 Распределение электрического поля.....	19
2.4 Токи насыщения.....	24
2.5 Вольтамперные зависимости.....	27
3. Конические образования на поверхности жидкости с учетом эмиссии с вершины конуса.....	33
3.1 Основные уравнения.....	34
3.2 Точные решения.....	37
3.3 Угловые зависимости при конечных значениях m	39
3.4 Анализ предельных случаев $m = 0$ и $m \rightarrow \infty$	42
4. Заключение.....	47
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ.....	50

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы

Известно [1-3], что свободная поверхность жидкости при воздействии достаточно сильного электрического поля становится неустойчивой. Это связано с взаимодействием электрического поля с индуцируемыми им зарядами на поверхности жидкости. В результате развития этой неустойчивости на поверхности жидкости могут формироваться различные геометрические особенности: лунки, капли, острия. Концентрация энергии на вершинах острий обеспечивает условия для инициирования эмиссионных процессов. Конические структуры, формирующиеся на поверхности жидкости, могут быть устойчивыми и при определенных условиях существовать неограниченно долго. Актуальность изучения этой проблематики обусловлена ее связью с общей проблемой нарушения электрической прочности [4], где важна роль жидкой фазы, а также с прикладной задачей создания источников заряженных частиц [5].

В настоящей работе исследуются конические структуры на поверхности жидкости с ионной проводимостью в электрическом поле. Рассматривается две задачи: конус с движением катионов по его поверхности и анионов в объеме жидкости и конус с током ионов на поверхности с вершины которого происходит эмиссия заряженных частиц в виде спрея.

Цель работы

Исследование конусов на поверхности жидкости с ионной проводимостью: построение точных решений для распределения электрического поля, нахождение зависимости между основными характеристиками задач: углом раствора конуса, током, напряжением, углом разлета частиц. Также целью является дополнить и обобщить работы предшественников по данной теме, в связи с чем в работе уделяется большое внимание анализу предельных случаев.

Задачи:

1. Получить точные решения для распределения электрического поля для конуса на поверхности жидкости с ионной проводимостью.
2. Построить угловые и вольтамперные характеристики для конуса на поверхности жидкости с ионной проводимостью.
3. Получить точные решения для распределения электрического поля для конуса с током ионов на поверхности и эмиссией заряженных частиц с его вершины.
4. Найти зависимость между углом раствора конуса и углом разлета эмитированных заряженных частиц при различных параметрах задачи.

Основные результаты и положения, выносимые на защиту:

1. В результате автомодельной редукции основных уравнений задачи для конуса на поверхности жидкости с ионной проводимостью удается построить точные решения для распределения потенциала электрического поля. Показывается, что в исследуемой задаче электрический ток протекает в режиме ограничения объемным и поверхностным зарядом ионов.
2. Полученные точные решения для задачи о конусе на поверхности жидкости с ионной проводимостью позволяют найти связь между основными параметрами задачи. Найдены угловые зависимости для напряжения и тока насыщения и рассмотрены при различных значениях диэлектрической проницаемости. Построены и проанализированы вольтамперные характеристики системы.
3. Построены точные решения для задачи о конусе с током на поверхности и эмиссией носителей заряда с его вершины. Полученные решения позволили найти зависимость между углом раствора конуса и углом разлета испускаемых с его вершины заряженных частиц.
4. Найденные зависимости были подробно проанализированы при различных значениях диэлектрической проницаемости жидкости и

отношении подвижностей носителей заряда. Были проведены
детальные рассмотрения предельных случаев задачи, которые
совпадали со случаями, рассмотренными в предшествующих работах
по исследуемой теме.

1. Обзор литературы

Изучение неустойчивости на поверхности жидкости всегда вызывало интерес и по этой теме имеется множество как теоретических, так и экспериментальных работ. Электрогидродинамическая неустойчивость поверхности жидкостей в электрическом поле была впервые предсказана в работах Л. Тонкса [1] и Я.И. Френкеля [2] применительно к проводящей жидкости. К настоящему времени хорошо экспериментально изучены электрогидродинамические неустойчивости поверхности диэлектрических и проводящих жидкостей [6], а также феррожидкостей в нормальном магнитном поле [7]. Для примера, на рисунке 1 показан процесс формирования конического образования на поверхности проводящей жидкости [8].

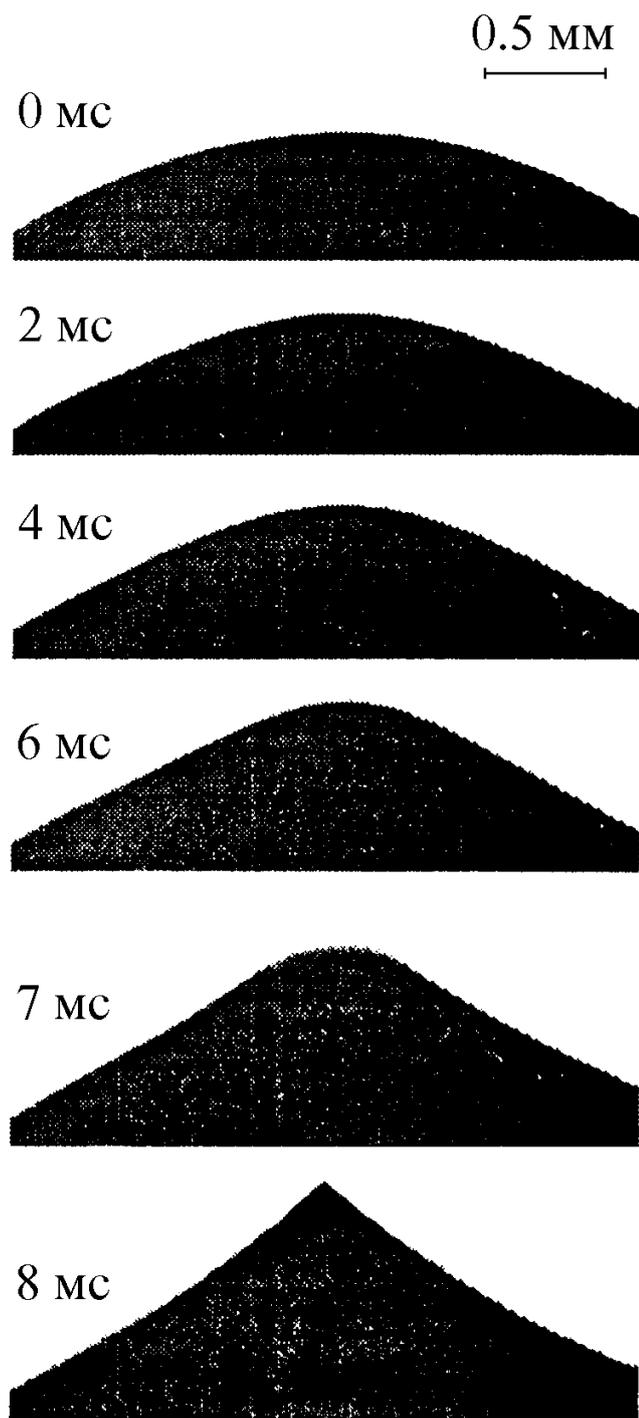


Рисунок 1 – Теневые фотографии процесса роста жидкометаллического выступа, формирующегося на катоде диаметром 4 мм [8].

В теоретических исследованиях были определены критерии развития неустойчивостей заряженной поверхности жидкостей; полностью описаны линейные стадии эволюции возмущений поверхности. Детально изучено формирование возмущенного рельефа поверхности диэлектрических жидкостей с малым поверхностным электрическим зарядом в околокритических полях [7,9,10]. Изучались также и нелинейные стадии развития электрогидродинамических неустойчивостей на поверхности жидкости. Именно нелинейные процессы ответственны за формирование геометрических особенностей на поверхности жидкости, например, конусов Тейлора [11]. На рисунке 2 показаны результаты численного моделирования формирования конической структуры на поверхности проводящей жидкости в электрическом поле [12]. Видно, что на поверхности жидкости образуются конические структуры. Такие структуры оказываются устойчивыми и могут (при определенных условиях) существовать неограниченно долго.

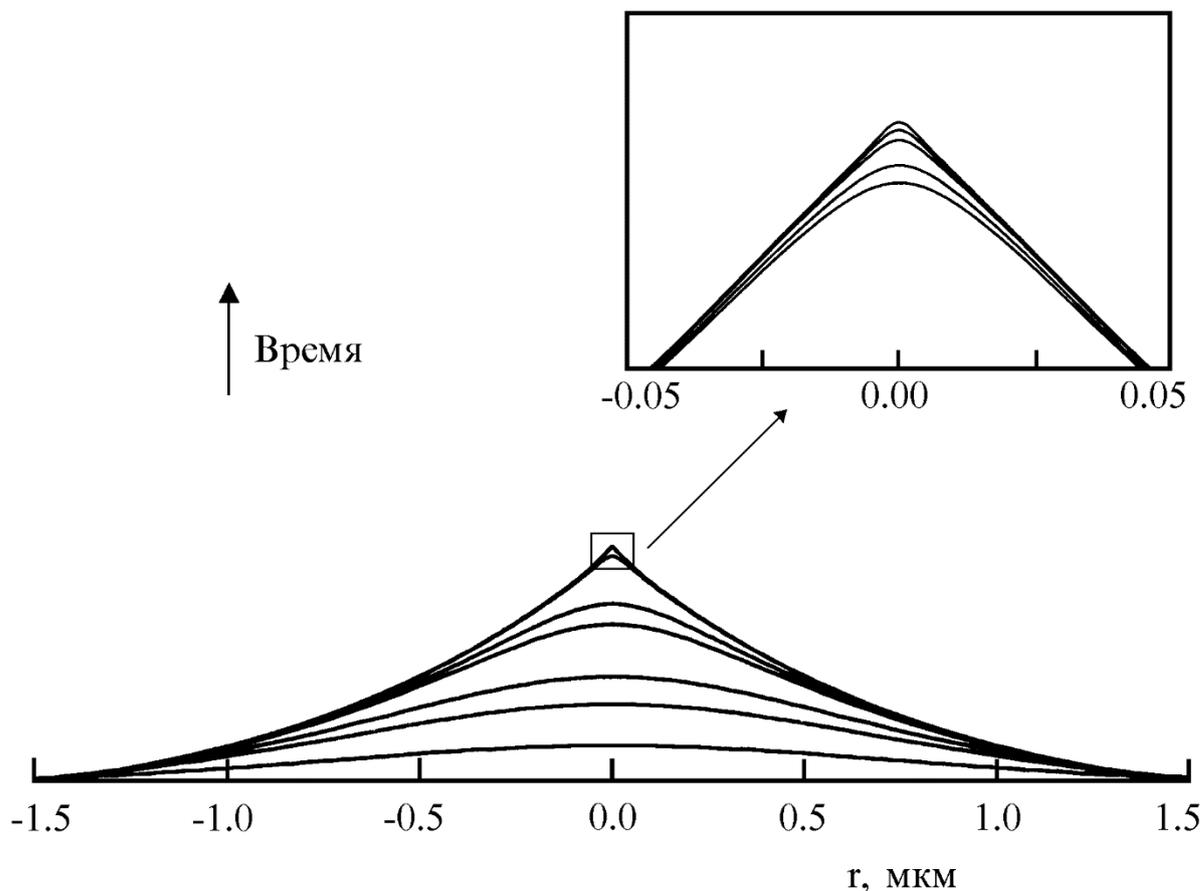


Рисунок 2 – результаты численного моделирования формирования конического острья на изначально гладкой поверхности (пунктир) проводящей жидкости во внешнем электрическом поле. Профили поверхности приведены в различные моменты времени. На вставке продемонстрирована эволюция границы на завершающей стадии развития неустойчивости [12].

Стационарные конические образования на поверхности проводящей жидкости были впервые описаны Тейлором в работе [13], где было показано, что угол раствора конуса составляет 98.6° . До этого подобные конусы экспериментально наблюдались в работах [14,15,16]. Позднее в работах [17,18] результаты Тейлора были обобщены на случай идеальных диэлектрических (непроводящих) жидкостей. В них показывалось, что

конусы могут образовываться только на поверхности диэлектриков с проницаемостью $\epsilon > 17.6$, а угол конуса варьируется в некоем диапазоне и зависит от диэлектрической проницаемости. Отметим, что на вершинах конусов, где электрическое поле становится формально бесконечным, могут инициироваться эмиссионные процессы. Так в работах [19,20] исследуются конусы на поверхности жидкого проводника с учетом эмиссии частиц с острия конуса и влияния образующегося объемного заряда. В этих работах была получена зависимость угла разлета эмитированных частиц и электрического тока от угла раствора конуса. В недавних работах [21,22,23] были изучены стационарные конические образования на поверхности жидкого диэлектрика в электрическом поле с учетом поверхностного тока (дрейфа) ионов по поверхности конуса.

В настоящей работе исследуются конические структуры на поверхности диэлектрической жидкости с учетом движения носителей тока по поверхности этого конуса и объемного заряда, создаваемого эмитированными с острия конуса заряженными частицами. Рассматриваются две задачи, для которых записываются основные уравнения и граничные условия. Демонстрируется, что обе задачи допускают автомодельную редукцию, что обусловлено инвариантностью соответствующих уравнений по отношению к масштабным преобразованиям. Решены редуцированные уравнения, что позволило определить зависимости между основными параметрами задач (углом раствора конуса, коэффициентом поверхностного натяжения, подвижностью носителей тока, приложенной разностью потенциалов, величиной электрического тока). Для первой задачи показывается что ток протекает в режиме ограничения объемным зарядом и соответствует закону Герни-Мотта $I \sim U^2$. Также находится диапазон углов в которых могут существовать конусы на поверхности жидкости при условиях задачи. Во второй задаче значительное внимание уделено исследованию предельных случаев, в частности, случая бесконечной подвижности

носителей ионов, дрейфующих по поверхности жидкого диэлектрика. Получена зависимость угла разлета эмитируемых частиц и угла раствора конуса от диэлектрической проницаемости среды. Эти результаты удалось обобщить также и на случай произвольной подвижности, когда нужно принимать во внимание поверхностный заряд ионов. Достоверность результатов подтверждается сопоставлением с результатами работ [13,17,19,21-23], которые получаются из нашей модели как различные пределы.

2. Конические образования на поверхности жидкости с ионной проводимостью

Будем рассматривать модель, основанную на приближении, которое было предложено Субботиным и Семеновым в [22,23]. В этих работах учитывается влияние значительного количества факторов: эффекты ионизации; динамика процессов диссоциации/рекомбинации; движение жидкости; баланс между силами вязкости, капиллярными и электростатическими силами, и так далее (опустим детали во избежание длинных описаний). Было показано, что при применении Тейлоровского скейлинга значительной частью этих факторов можно пренебречь в окрестности вершины конуса (они имеют более высокий порядок малости при разложении по малому расстоянию от вершины конуса). Поэтому становится возможным предложить компактную модель, основные соотношения которой будут приведены ниже.

2.1. Основные уравнения

Будем считать, что жидкость с конечной электрической проводимостью (она обеспечивается за счет ионов) принимает во внешнем электрическом поле форму конуса с углом полураствора β , см. рис. 2.1.

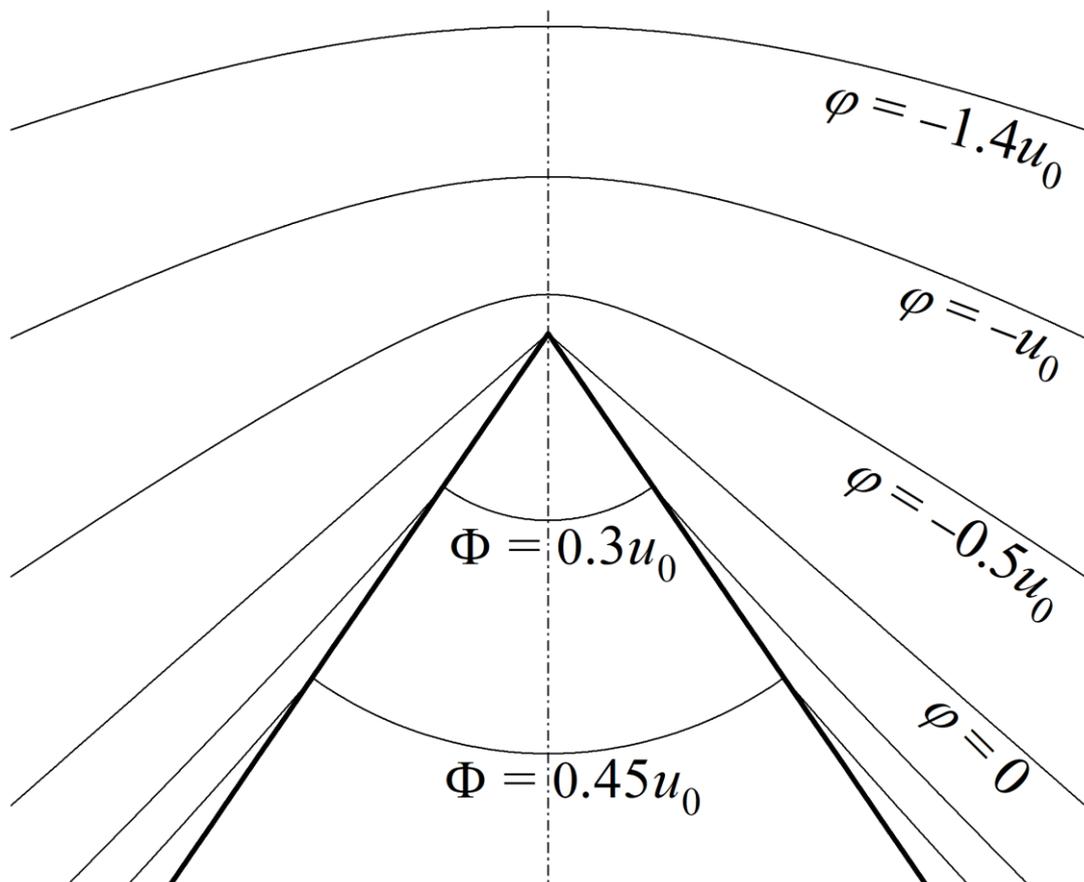


Рис. 2.1. Схематическая геометрия задачи. Распределение электрического поля возле вершины конуса показана для полуугла 35° ; u_0 – некоторое характерное значение потенциала (см. детали в п.2.4)

Теперь запишем уравнения, описывающие распределение электрического поля с учетом влияния объемного и поверхностного зарядов. Потенциалы электрического поля внутри и снаружи жидкости обозначены Φ и φ соответственно. Будем также считать, что объемный заряд отсутствует снаружи жидкого конуса. Это приближение соответствует случаю, когда подвижность носителей тока в окружающей среде значительно выше чем в жидкости и, следовательно, влиянием их объемного заряда можно пренебречь. Таким образом, распределение потенциала электрического поля снаружи жидкости может быть приблизительно описано уравнением

Лапласа. Будем использовать сферическую систему координат, в которой уравнение Лапласа имеет вид

$$\varphi_{RR} + \frac{2}{R}\varphi_R + \frac{1}{R^2}\varphi_{\theta\theta} + \frac{\cot\theta}{R^2}\varphi_\theta = 0, \quad (2.1)$$

где R – расстояние от вершины конуса, θ – полярный угол. Внутри жидкого конуса присутствует отрицательный объемный заряд с плотностью ρ за счет дрейфа анионов. В этой области потенциал электрического поля описывается уравнением Пуассона

$$\Phi_{RR} + \frac{2}{R}\Phi_R + \frac{1}{R^2}\Phi_{\theta\theta} + \frac{\cot\theta}{R^2}\Phi_\theta = -\frac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon}, \quad (2.2)$$

где ε_0 – электрическая постоянная, ε – относительная диэлектрическая проницаемость жидкости. Рассмотрим граничные условия для уравнений (2.1) и (2.2). Граница конуса определяется уравнением $\theta = \Theta \equiv \pi - \beta$. На границе присутствует положительный объемный заряд с плотностью σ , вызванный дрейфом катионов в электрическом поле. Тангенциальные компоненты напряженности электрического поля внутри и снаружи жидкости совпадают на ее границе,

$$\varphi_R = \Phi_R, \quad \theta = \Theta, \quad (2.3)$$

Нормальная компонента напряженности электрического поля испытывает разрыв, равный поверхностной плотности свободного заряда,

$$\frac{1}{R}\varphi_\theta - \frac{\varepsilon}{R}\Phi_\theta = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad \theta = \Theta, \quad (2.4)$$

где диэлектрическая проницаемость окружающего газа равна единице. На оси симметрии нормальная составляющая вектора напряженности электрического поля отсутствует, то есть

$$\varphi_\theta = 0, \quad \theta = 0, \quad (2.5)$$

$$\Phi_{\theta} = 0, \quad \theta = \pi. \quad (2.6)$$

Следуя [22,23], мы допускаем, что нормальная компонента электрического поля внутри жидкости полностью экранируется зарядом катионов на поверхности,

$$\Phi_{\theta} = 0, \quad \theta = \Theta. \quad (2.7)$$

В этом предельном случае на границе жидкости не возникает поляризованного заряда. Стоит отметить, что система уравнений на распределение электрического поля (2.1)-(2.6) становится переопределенной, если к ней добавить условие (2.7). Однако, как будет показано, является возможным построить решение задачи, которое обеспечивает совместность системы уравнений (2.1)-(2.7).

Основываясь на условиях (2.6) и (2.7), можно предположить что полярная составляющая электрического поля отсутствует не только на оси $\theta = \pi$ и на границе $\theta = \Theta$, но также и во всем объеме конуса, т.е. при $\Theta \leq \theta \leq \pi$. В таком случае, потенциал электрического поля зависит только от единственной переменной R , т.е., он может быть представлен в виде $\Phi = \Phi(R)$. Таким образом, уравнение Пуассона (2.2) запишется в виде обыкновенного дифференциального уравнения по переменной R ,

$$\Phi_{RR} + \frac{2}{R}\Phi_R = -\frac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon}, \quad (2.8)$$

из которого следует, что распределение плотности объемного заряда тоже сферически симметрично $\rho = \rho(R)$. Граничное условие (2.4) на нормальную компоненту электрического поля также существенно упрощается; оно переписывается как

$$\frac{1}{R}\varphi_{\theta} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad \theta = \Theta. \quad (2.9)$$

Обозначим μ_a и μ_c как подвижности анионов и катионов. Они дрейфуют через жидкость с радиальными скоростями $V_a = -\mu_a E$ и $V_c = -\mu_c E$ соответственно (здесь $E = -\Phi_R$ - напряженность электрического поля внутри жидкого конуса). Таким образом, можно записать стационарные уравнения непрерывности для анионов и катионов в виде

$$\rho \left(\Phi_{RR} + \frac{2}{R} \Phi_R \right) + \rho_R \Phi_R = 0, \quad (2.10)$$

$$\sigma \left(\Phi_{RR} + \frac{1}{R} \Phi_R \right) + \sigma_R \Phi_R = 0. \quad (2.11)$$

Можно заметить, что коэффициенты в этих уравнениях отличаются друг от друга. Это объясняется тем, что движение анионов трехмерное (они движутся в объеме жидкости), а движение катионов – двумерное (они движутся по поверхности жидкости).

Жидкость находится в состоянии покоя если электрическая сила, действующая на анионы, компенсируется градиентом гидростатического давления

$$p_R = -\rho \Phi_R \quad (2.12)$$

где мы полагаем, что давление не зависит от угла θ , т.е., $p = p(R)$. Наконец, условие равновесия свободной поверхности жидкости может быть выражено через условие баланса давлений,

$$p - p_0 = p_\alpha - p_E, \quad \theta = \Theta, \quad (2.13)$$

Где p_0 – атмосферное давление, p_α и p_E – капиллярное и электростатическое давления, выраженные следующим образом [24]:

$$p_\alpha = \frac{\alpha}{R} \cot \beta = -\frac{\alpha}{R} \cot \Theta,$$

(α – коэффициент поверхностного натяжения жидкости). Учитывая дополнительное условие (2.7), из (2.13) получаем

$$p - p_0 = -\frac{\alpha}{R} \cot \Theta - \frac{\varepsilon_0}{2R^2} \left(\varphi_\theta^2 + (\varepsilon - 1) R^2 \varphi_R^2 \right) \Big|_{\theta=\Theta} \quad (2.14)$$

Это уравнение определяет угол полураствора конуса β

2.2 Точное автомодельное решение

Из уравнения (2.14) для баланса давлений на поверхности жидкого конуса следует, что напряженность электрического поля должна уменьшаться с расстоянием R от вершины конуса по закону $R^{-1/2}$, а также то что $p - p_0 \sim R^{-1}$. Таким образом потенциалы электрического поля внутри и снаружи жидкости удовлетворяют закону Тейлора $\Phi \sim R^{1/2}$ и $\varphi \sim R^{1/2}$. Уравнение (2.8) сразу же дает отношение $\rho \sim R^{-3/2}$ для плотности объемного заряда, которое автоматически удовлетворяет уравнению непрерывности (2.10). Таким же образом, уравнение (2.9) приводит к соотношению $\sigma \sim R^{-1/2}$ для плотности поверхностного заряда, которое в свою очередь удовлетворяет уравнению непрерывности (2.11). Такая же зависимость для ρ и σ (скорректированная для использования приближения “slender body”) применялась в работах [22,23]. Тот факт, что зависимость Тейлора $\Phi \sim R^{1/2}$ не нарушается в присутствии дрейфа заряженных частиц в объеме конической области, был, судя по всему, впервые установлен в работе [19] для потока заряженных капель, выпускаемых с вершины конуса. В работе [21] было показано, что такая зависимость также остается справедливой при учете ионного тока на поверхности.

Потенциал φ будем искать в виде $\varphi(R, \theta) = F(\theta)R^{1/2}$, который соответствует требуемому закону (F – неизвестная функция). Подставляя это отношение в уравнение Лапласа (2.1), получаем обыкновенное дифференциальное уравнение на угловое распределение потенциала электрического поля

$$3F / 4 + F_{\theta\theta} + \cot \theta F_{\theta} = 0$$

Данное уравнение имеет решение, удовлетворяющее условию (2.5), – $F = CP_{1/2}(\cos \theta)$, где $P_{1/2}$ – функция Лежандра степени $1/2$, C – некоторая константа. Затем, подставляя

$$\varphi = CP_{1/2}(\cos \theta)R^{1/2}, \quad \Phi = AR^{1/2}, \quad (2.15)$$

$$\rho = BR^{-3/2}, \quad \sigma = DR^{-1/2}, \quad p = HR^{-1} + p_0, \quad (2.16)$$

мы сводим уравнения ((2.3), (2.8), (2.9), (2.12) и (2.14)) к системе алгебраических уравнений на константы A, B, C, D и H :

$$A = CP_{1/2}(\cos \Theta),$$

$$3A / 4 = -B / (\varepsilon_0 \varepsilon),$$

$$-C \sin \Theta P'_{1/2}(\cos \Theta) = D / \varepsilon_0,$$

$$-H = -BA / 2,$$

$$H = -\alpha \cot \Theta - \frac{\varepsilon_0}{2} \left[C^2 \sin^2 \Theta P'^2_{1/2}(\cos \Theta) + \frac{\varepsilon - 1}{4} A^2 \right]$$

где $P'_{1/2}$ – производная функции Лежандра по аргументу. Решая эту систему, находим константы:

$$C = - \left[\frac{-8\varepsilon_0^{-1} \alpha \cot \Theta}{4 \sin^2 \Theta P'^2_{1/2}(\cos \Theta) - (2\varepsilon + 1) P^2_{1/2}(\cos \Theta)} \right]^{1/2}, \quad (2.17)$$

$$A = CP_{1/2}(\cos \Theta), \quad (2.18)$$

$$B = -3\varepsilon_0 \varepsilon CP_{1/2}(\cos \Theta) / 4, \quad (2.19)$$

$$D = -\varepsilon_0 CP'_{1/2}(\cos \Theta) \sin \Theta, \quad (2.20)$$

$$H = -3\varepsilon_0\varepsilon C^2 P_{1/2}^2(\cos\Theta) / 8 \quad (2.21)$$

Таким образом, мы получаем точное частное решение для данной задачи.

Выражения для распределения электрического поля, заряда и давления содержат следующие параметры: угол полураствора конуса $\beta = \pi - \Theta$, коэффициент поверхностного натяжения α и диэлектрическую проницаемость жидкости ε . Следует отметить, что решение не зависит от механизма образования ионов. Это объясняется тем, что, как будет показано в п.2.4, полученное решение соответствует ограничению объемным зарядом тока через жидкий конус. По этой же причине подвижности ионов μ_c и μ_a не входят в формулы (2.15)-(2.20).

Из общих соображений ясно что решения имеют физический смысл только если тангенциальная компонента электрического поля на поверхности конуса направлена к вершине. Это соответствует условию $A > 0$, откуда следует что угол β лежит в интервале $0 \leq \beta \leq \beta_T \approx 49.3^\circ$. Кроме того, подкоренное выражение в (2.17) должно быть положительным. Это требование всегда выполняется при $1 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_c$, где $\varepsilon_c \approx 16.3$. Для $\varepsilon > \varepsilon_c$ существует диапазон углов ($\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$), в котором полученное решение теряет свой смысл, т.е., не выполняется условие баланса давлений (2.14). Предельные углы $\beta_{1,2}$ находятся из условия равенства нулю знаменателя в (2.17). Это соответствует зависимости между параметрами ε и β :

$$\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{2\sin^2\beta P_{1/2}'^2(-\cos\beta)}{P_{1/2}^2(-\cos\beta)}. \quad (2.22)$$

Эта зависимость проиллюстрирована на рис. 2.2. Можно увидеть, что уравнение (2.22) имеет единственный корень $\beta = \beta_c \approx 17.6^\circ$ при $\varepsilon = \varepsilon_c$ и два корня ($\beta_{1,2}$) при $\varepsilon = \varepsilon_c$. Решение (2.15)-(2.21) имеет смысл при $0 \leq \beta < \beta_1$ (область малых углов) и при $\beta_2 < \beta \leq \beta_T$ (область больших углов). При $\beta = \beta_{1,2}$

коэффициенты в выражениях (2.15) и (2.16) становятся бесконечными. К примеру, для воды ($\epsilon \approx 80 \gg \epsilon_c$) мы получаем $\beta_1 \approx 3.0^\circ$ и $\beta_2 \approx 39.5^\circ$.

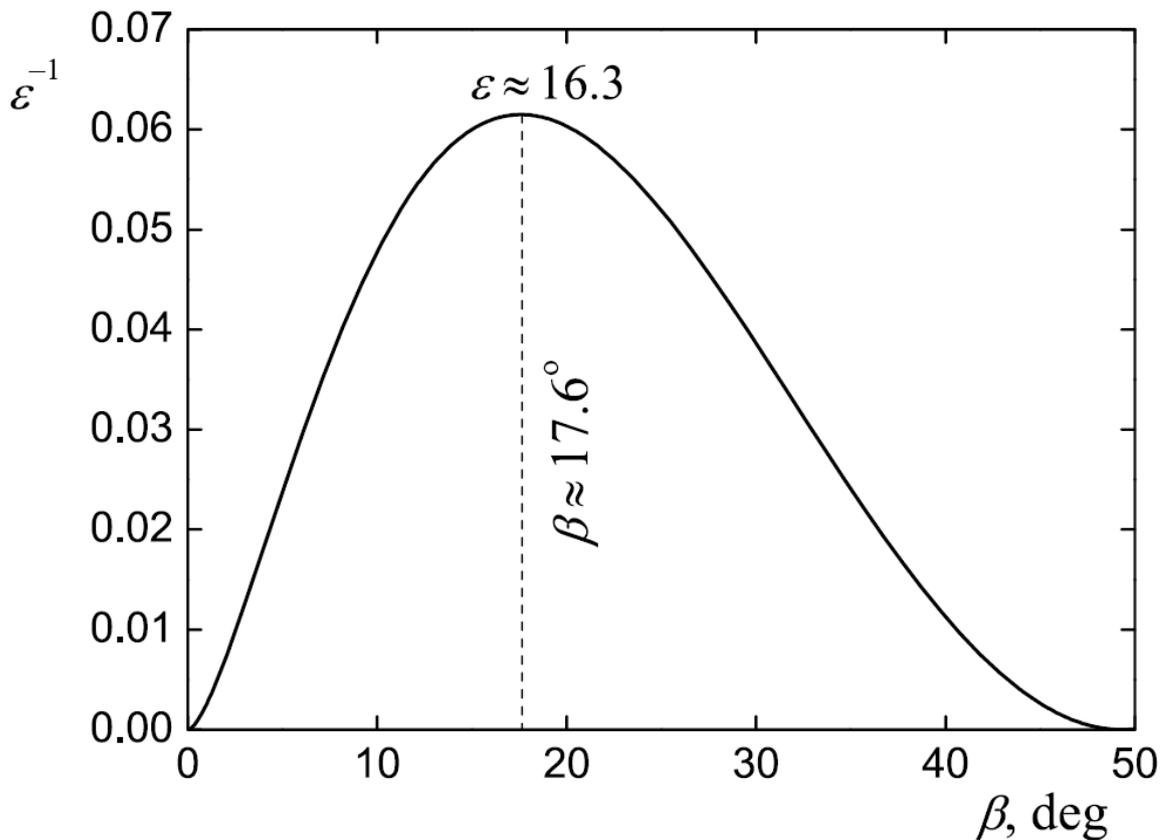


Рис. 2.2. Связь между обратной диэлектрической проницаемостью ϵ^{-1} и полууглом конуса β соотв. ур-ю (2.22).

2.3 Распределение электрического поля

Решения полученные выше для распределения электрического поля возле вершины конуса проиллюстрированы на рис. 2.1. Там показаны характерные эквипотенциальные поверхности для конуса с углом вершины $2\beta = 70^\circ$. Они соответствуют потенциалам $\varphi = -1.4u_0, -u_0, -0.5u_0, 0, 0.3u_0, 0.45u_0$, где u_0 – некоторое характерное значение потенциала поля. Внутри жидкого конуса эквипотенциальные поверхности являются сферами. Эквипотенциальная поверхность $\varphi = 0$ представляет собой конус $\theta = \pi - \beta_T$ с Тейлоровским полууглом раствора.

Пусть L характерный пространственный масштаб задачи (например, размер конуса). Для полученных решений потенциал на вершине конуса равен нулю. Введем падения потенциала поля на оси симметрии задачи вне U_o и внутри U_i жидкого конуса на расстоянии L от его вершины:

$$U_o \equiv |\varphi(L,0) - \varphi(0,0)| = |\varphi(R,0)|,$$

$$U_i \equiv |\Phi(0) - \Phi(L)| = |\Phi(L)|.$$

(потенциал на вершине конуса считаем равным нулю, т.е., $\varphi(0, 0) = \Phi(0) = 0$). Согласно (2.15) для распределения потенциала поля снаружи конуса (φ) и внутри жидкости (Φ) мы имеем:

$$U_o = |C| L^{1/2}, \quad U_i = |A| L^{1/2}. \quad (2.23)$$

Введем также U_i суммарное падение потенциала на масштабе L в окрестности конического острия

$$U = U_o + U_i = (|C| + |A|) L^{1/2}. \quad (2.24)$$

На рисунке 2.3 представлены угловые зависимости падения потенциала вне (U_o) и внутри (U_i) жидкого конуса, а также суммарное падение потенциала (U) для субкритического значения проницаемости жидкости $\varepsilon = 10 < \varepsilon_c \approx 16.3$. Использована нормировка потенциала на характерное значение напряжения

$$u_0 = \sqrt{\alpha L / \varepsilon_0}. \quad (2.25)$$

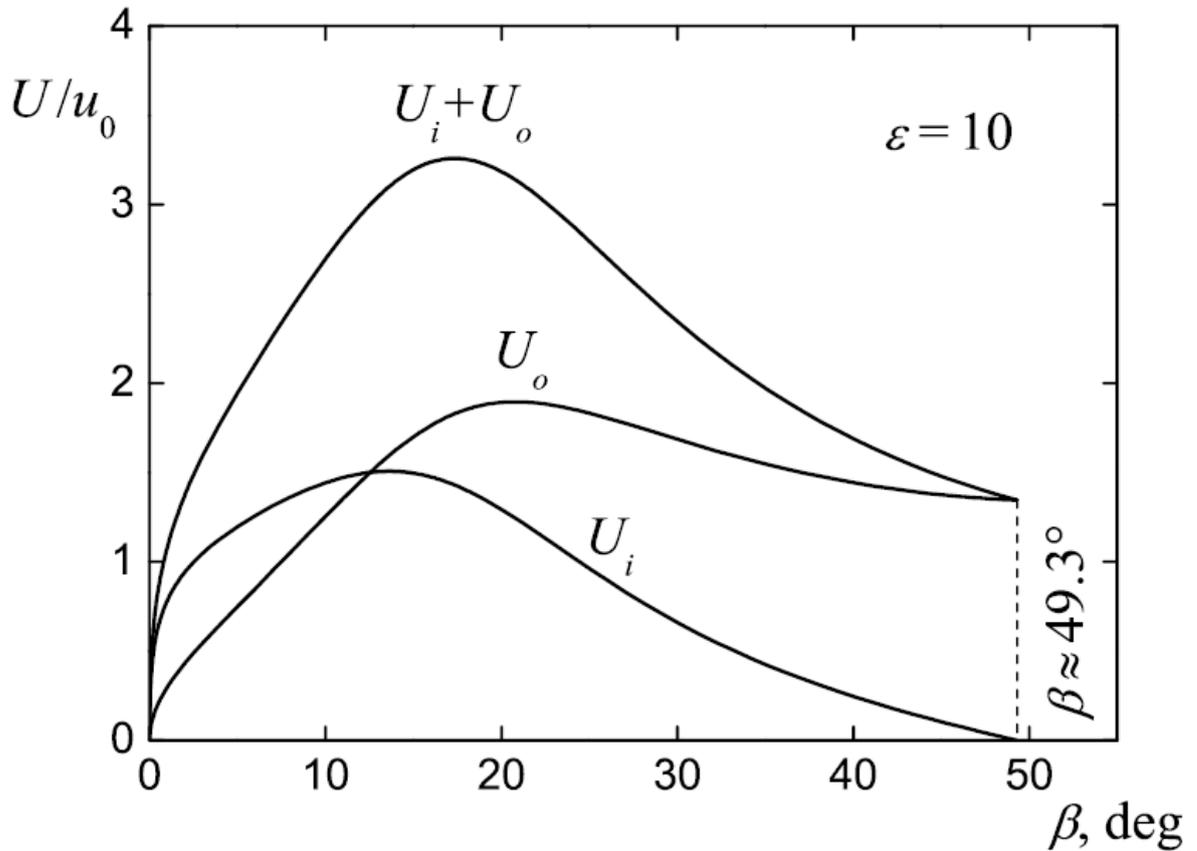


Рис. 2.3. Угловые зависимости для падения потенциала внутри и снаружи жидкого конуса, U_i и U_o , и полного падения потенциала $U = U_i + U_o$ (нормировано на $u_0 = \sqrt{\alpha L / \varepsilon_0}$) для $\varepsilon = 10$

Можно увидеть, что основной вклад в полное падение потенциала U при сравнительно малых углах β дает падение внутри жидкости U_i , а при больших углах – падение потенциала снаружи жидкости U_o . Имеющие физический смысл решения (для них тангенциальная компонента поля на поверхности конуса направлена к его вершине) относятся к диапазону $0 \leq \beta \leq \beta_T \approx 49.3^\circ$. На границе диапазона мы имеем: $U_o = U_i = 0$ при $\beta = 0$ и $U_i = 0$ и $U_o \equiv U_T \approx 1.35u_0$ при $\beta = \beta_T$ для любых ε (значение напряжения U_T соответствует решению Тейлора [13]).

Рассмотрим пределы $\beta \rightarrow 0$ и $\beta \rightarrow \beta_T$ подробнее. Для малых углов для входящих в решения (2.17)–(2.21) функций $P_{1/2}$ и $P'_{1/2}$ в основном порядке разложения по β имеем:

$$P_{1/2}(-\cos \beta) \approx \frac{2}{\pi} \ln \beta, \quad P'_{1/2}(-\cos \beta) \approx \frac{2}{\pi \beta^2}.$$

Отсюда находим для коэффициентов решения (2.15)

$$C \approx -\pi \sqrt{\frac{\alpha \beta}{2\varepsilon_0}}, \quad A \approx -\sqrt{\frac{2\alpha \beta}{\varepsilon_0}} \ln \beta \quad (2.26)$$

и, как следствие, для напряжений $U_{o,i}$ находим

$$U_o \approx \pi u_0 \sqrt{\beta/2}, \quad U_i \approx -u_0 \sqrt{2\beta} \ln \beta. \quad (2.27)$$

Примечательно, что в этих предельных выражениях исчезает зависимость от проницаемости среды ε . Из этих выражений (2.27) сразу видно, что при малых углах разности потенциалов для малых углов – малы, причем основное падение приходится на внутреннюю область: отношение $U_i / U_o \approx -(2/\pi) \ln \beta$ стремится к бесконечности при $\beta \rightarrow 0$. Это согласуется с результатами работ [22,23], где пренебрегалось падением потенциалов вне конуса для малых β в случае $\varepsilon \gg 1$).

Рассмотрим теперь $\beta \rightarrow \beta_T$. Поскольку угол Тейлора определяется из условия $P_{1/2}(-\cos \beta_T) = 0$ (см. [13]), то имеем из (2.18) $A = 0$ для Тейлоровского угла раствора конуса $\Theta = \pi - \beta_T$ при том что C – конечно. Как следствие, $U_i = 0$, а U_o – конечно (см. рис. 2.3), так что все падение потенциала приходится внешней по отношению к конусу область.

Рис. 2.4 демонстрирует угловые зависимости полного падения потенциала для подкритических и надкритических значений диэлектрической проницаемости. Можно увидеть, что для $\varepsilon < \varepsilon_c$ зависимость

U от β имеет максимум. Этот максимум становится более выраженным, когда ε стремится к ε_c : значение U устремляется к бесконечности при $\beta = \beta_c \approx 17.6^\circ$ (см. п. 2). Если $\varepsilon > \varepsilon_c$, то, как видно из рис. 2.4., решения существуют в двух отдельных областях: в области малых углов $0 \leq \beta < \beta_1$ и в области больших углов $\beta_2 < \beta \leq \beta_T$ ($\beta_1 \approx 8.1^\circ$ и $\beta_2 \approx 29.5^\circ$ для $\varepsilon = 25$). Падение потенциала стремится к бесконечности при $\beta \rightarrow \beta_{1,2}$. Внутри допустимых диапазонов напряжение U растет с увеличением ε . В пределах $\beta \rightarrow 0$ и $\beta \rightarrow \beta_T$ поведение U становится универсальным: зависимость от диэлектрической проницаемости жидкости пропадает (для малых углов это можно увидеть из формул (2.27))

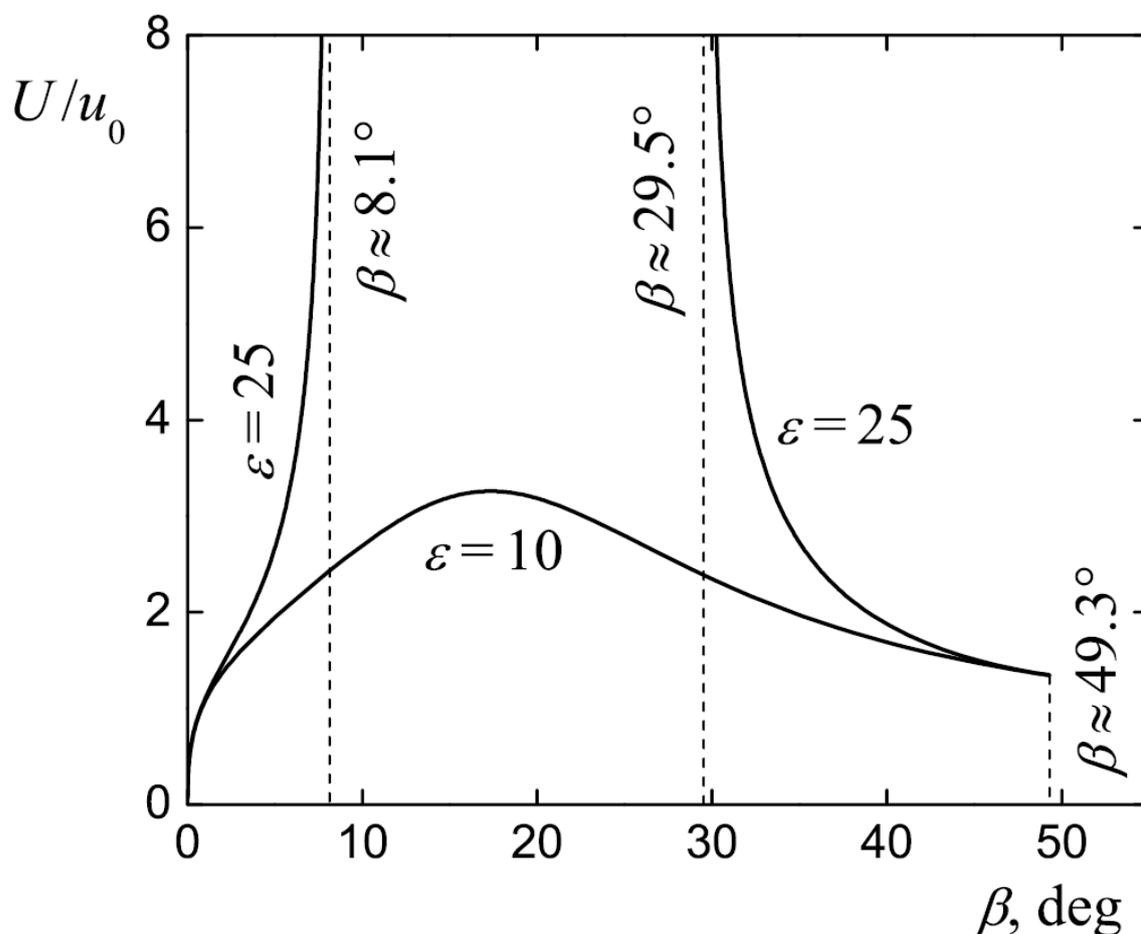


Рис. 2.4. Угловые зависимости для полного падения потенциала U (нормировано на u_0) для $\varepsilon = 10 < \varepsilon_c$ и $\varepsilon = 25 > \varepsilon_c$

2.4 Ток насыщения

Условие (2.7), согласно которому поверхностный заряд полностью экранирует нормальную компоненту электрического поля внутри жидкости, подразумевает то, что решение, полученное выше, соответствует режиму, при котором происходит ограничение поверхностного тока этим зарядом: увеличение плотности заряда создает в жидкости электрическое поле, направленное противоположно внешнему полю. Остается открытым вопрос какому режиму протекания соответствует ток в объеме жидкости. В работе [25] было получено точное решение для сферически симметричного распределения электрического поля для протекания тока в режиме ограничения объемным зарядом применительно к коронному разряду. Оно имеет вид

$$E \propto R^{-2} (R^3 - R_0^3)^{1/2},$$

Где R_0 – радиус активного электрода, на котором электрическое поле равно нулю (это решение формально соответствует концентрическим сферическим электродам). Это распределение превращается в используемое в данной работе (т.е., $E \sim R^{-1/2}$) в пределе $R_0 \rightarrow 0$. В нашем случае этот предел соответствует коническому образованию с нулевым радиусом кривизны вершины. Следовательно, решение (2.15)-(2.20) соответствует протеканию тока в режиме ограничения объемным зарядом несмотря на бесконечную напряженность поля на вершине (насколько нам известно, электрическое поле становится равным нулю в данном режиме на гладкой поверхности).

Полученное точное решение позволяет определить электрический ток I , протекающий через конус

$$I = I_c + I_a, \tag{2.28}$$

$$I_c = 2\pi\mu_c R \sigma \Phi_R \sin \beta = \pi\mu_c D A \sin \beta, \tag{2.29}$$

$$I_a = -2\pi\mu_a R^2 \rho \Phi_R (1 - \cos \beta) = -\pi\mu_a AB(1 - \cos \beta), \quad (2.30)$$

где I_c – ток катионов по поверхности конуса, а I_a – ток анионов в его объеме. Так как решение (2.15)-(2.20) соответствует ограничению тока объемным зарядом, то выражения (2.28)-(2.30) дают нам токи насыщения, т.е., максимально возможные значения токов I , I_c , I_a , протекающих через жидкий конус, вне зависимости от механизма образования носителей заряда.

Рассмотрим зависимости токов насыщения I , I_c , I_a от параметров задачи. Отношение анионного и катионного токов описывается формулой

$$\frac{I_a}{I_c} = \varepsilon m G(\beta), \quad (2.31)$$

где $m \equiv \mu_a/\mu_c$ – отношение подвижностей, а

$$G(\beta) = -\frac{1 - \cos \beta}{\sin^2 \beta} \cdot \frac{3P_{1/2}(-\cos \beta)}{4P'_{1/2}(-\cos \beta)}.$$

Из (31) можно увидеть, что отношение токов линейно зависит от проницаемости ε (см. также [23]). Его угловая зависимость определяется вспомогательной функцией G , показанной на рис. 2.5. Эта функция маленькая; ее максимальное значение $G_{\max} \approx 0.055$ соответствует углу $\beta \approx 29.6^\circ$. Таким образом, при сравнимых подвижностях положительных и отрицательных ионов, током анионов можно пренебречь для случаев жидкостей со сравнительно невысокой диэлектрической проницаемостью; можно приблизительно записать что $I \approx I_c$. Ситуация меняется для жидкостей с высокой диэлектрической проницаемостью, такой как вода с $\varepsilon \approx 80$. Для воды имеем [23,26] $m \equiv \mu_a/\mu_c \approx 0.58$, и таким образом, коэффициент εm перед G в (2.31) будет довольно большим: он будет примерно равен 47. В этом случае токи, переносимые катионами и анионами сравнимы в большом диапазоне углов, $\beta_2 \approx 39.5^\circ < \beta < \beta_T \approx 49.3^\circ$. Для углов в интервале $39.5^\circ < \beta < 45.2^\circ$ объемный ток анионов превышает поверхностный ток катионов

(отношение токов достигает 2.0 при $\beta \rightarrow \beta_2$). Катионный ток доминирует над анионным при углах близких к углу Тейлора (при $45.2^\circ < \beta < 49.3^\circ$). В области малых углов $0 < \beta < \beta_1 \approx 3.0^\circ$ отношение токов не превышает 0.15 и, следовательно, здесь можно пренебречь током анионов.

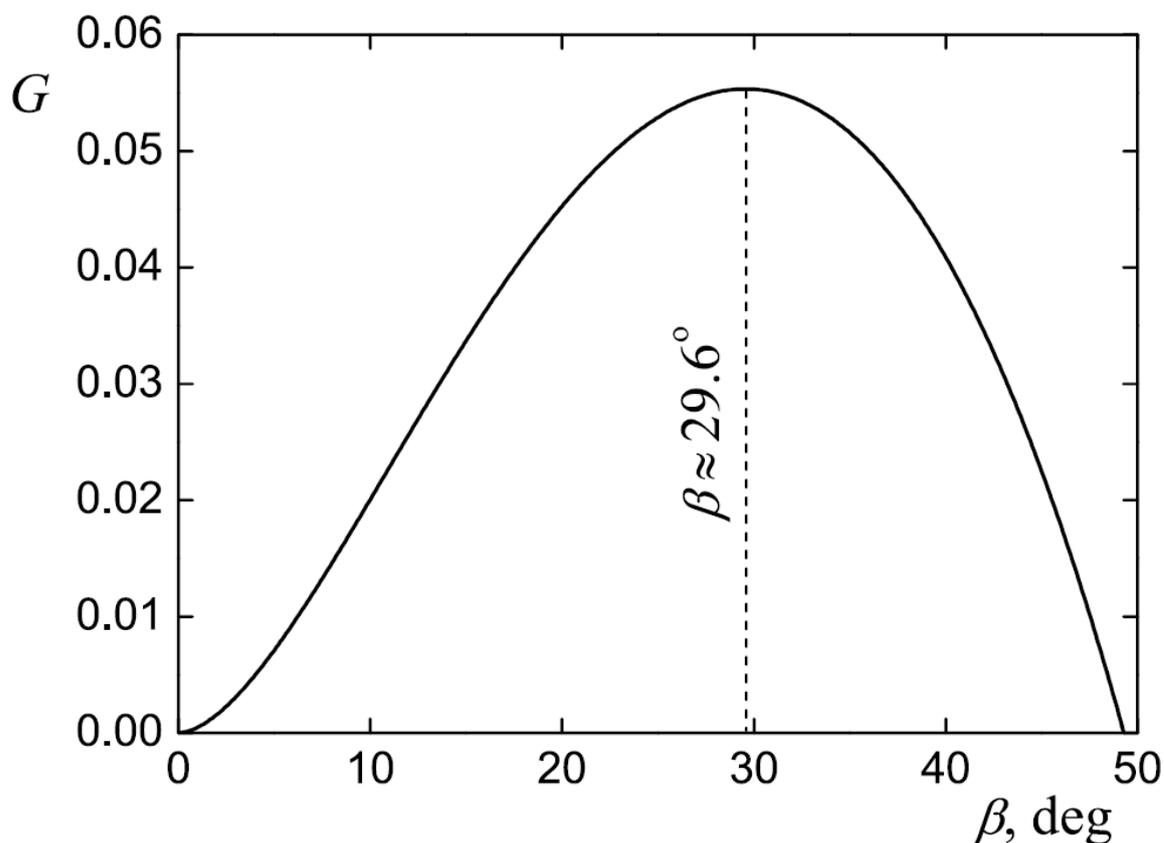


Рис. 2.5. Функция, характеризующая отношение анионного тока к катионному: см. ур-е (2.31)

Типичные угловые для полного тока при различных значениях диэлектрической проницаемости показаны на рис. 2.6., где ток отнормирован на характерное значение

$$i_0 = \alpha \mu_c. \quad (2.32)$$

Для субкритических значений диэлектрической проницаемости $\epsilon < \epsilon_c$ ток всегда конечен. Он равен нулю при $\beta = 0$ и при $\beta = \beta_T$ и достигает максимума между этими значениями (при $\beta \approx 17.9^\circ$ для $\epsilon = 10$). При $\epsilon > \epsilon_c$ не

существует решений для промежуточных значений углов $\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$, где $\beta_{1,2}$ определяются уравнением (2.22). Они существуют в областях малых и больших углов, $0 \leq \beta < \beta_1$ и $\beta_2 < \beta \leq \beta_T$. Можно увидеть, что полный ток I уходит в бесконечность, когда β достигает β_1 или β_2 .

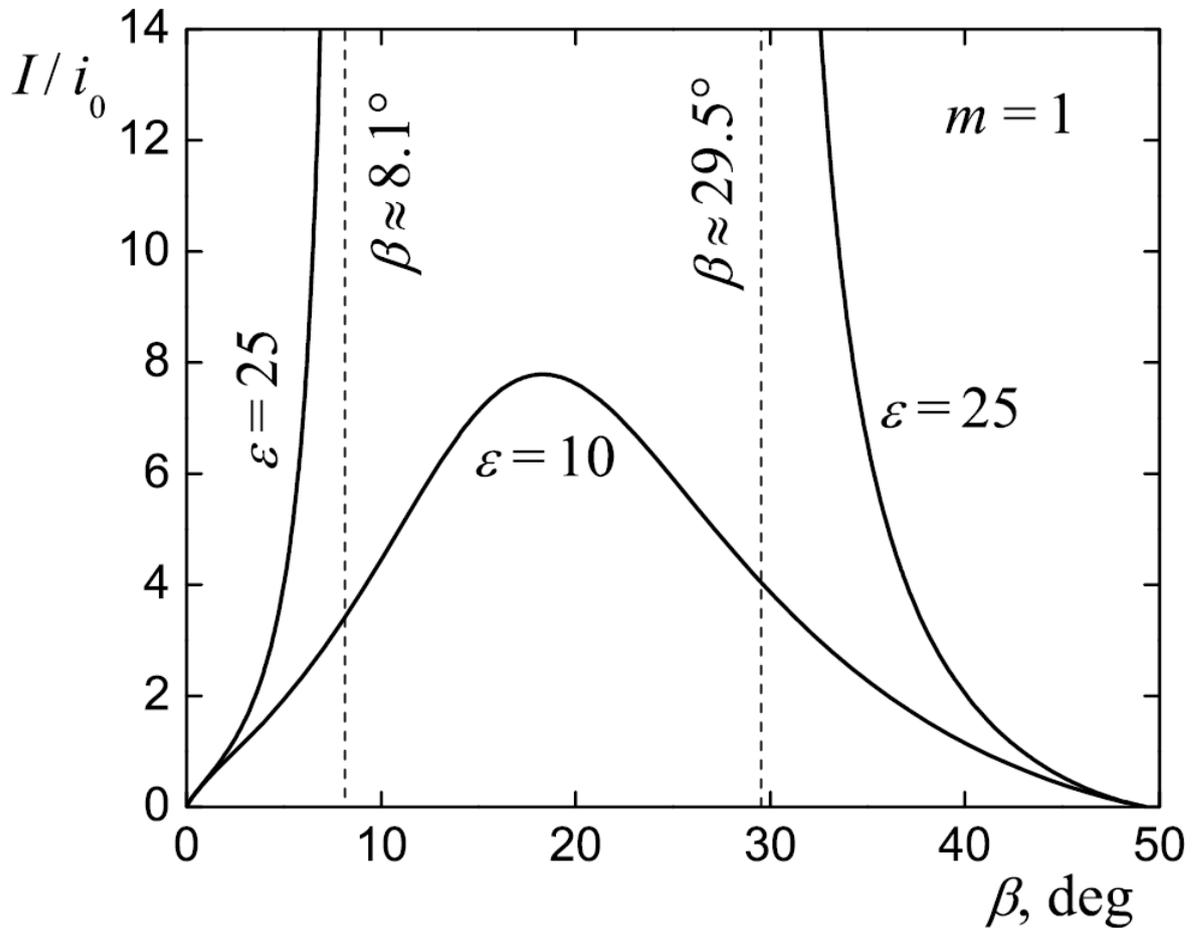


Рис. 2.6. Зависимости полного тока I через конус (нормировка на $i_0 = \alpha\mu_c$) от полуугла конуса β для $\varepsilon = 10, 25$ и $m = 1$.

2.5 Вольтамперные зависимости

В предыдущих разделах мы получили угловые зависимости для напряжений U_o, U_i, U , ур-я (2.23) и (2.24), и токов I_c, I_a, I , ур-я (2.28)-(2.30). Это позволяет нам построить вольт-амперные характеристики путем исключения угла β из этих уравнений.

Зависимость между током I , протекающим через конус, и падением потенциала внутри U_i , снаружи U_o и суммарного U показаны на рис. 2.7 для совпадающих подвижностей катионов и анионов $m = 1$ и субкритического значения диэлектрической проницаемости жидкости $\varepsilon = 10 < \varepsilon_c \approx 16.3$. Стрелками показано направление, соответствующее увеличению полуугла раствора конуса β (от нуля до угла Тейлора β_T). Видно, что ключевые зависимости $I(U_i)$ и $I(U_o)$ многозначны и включают в себя множество участков с различным знаком дифференциального сопротивления dU / dI . Кроме того, они характеризуются различными направлениями возрастания β (против часовой для $I(U_i)$ и по часовой для $I(U_o)$). Все это определяет значительную сложность итоговой зависимости $I(U)$, которая является самопересекающейся.

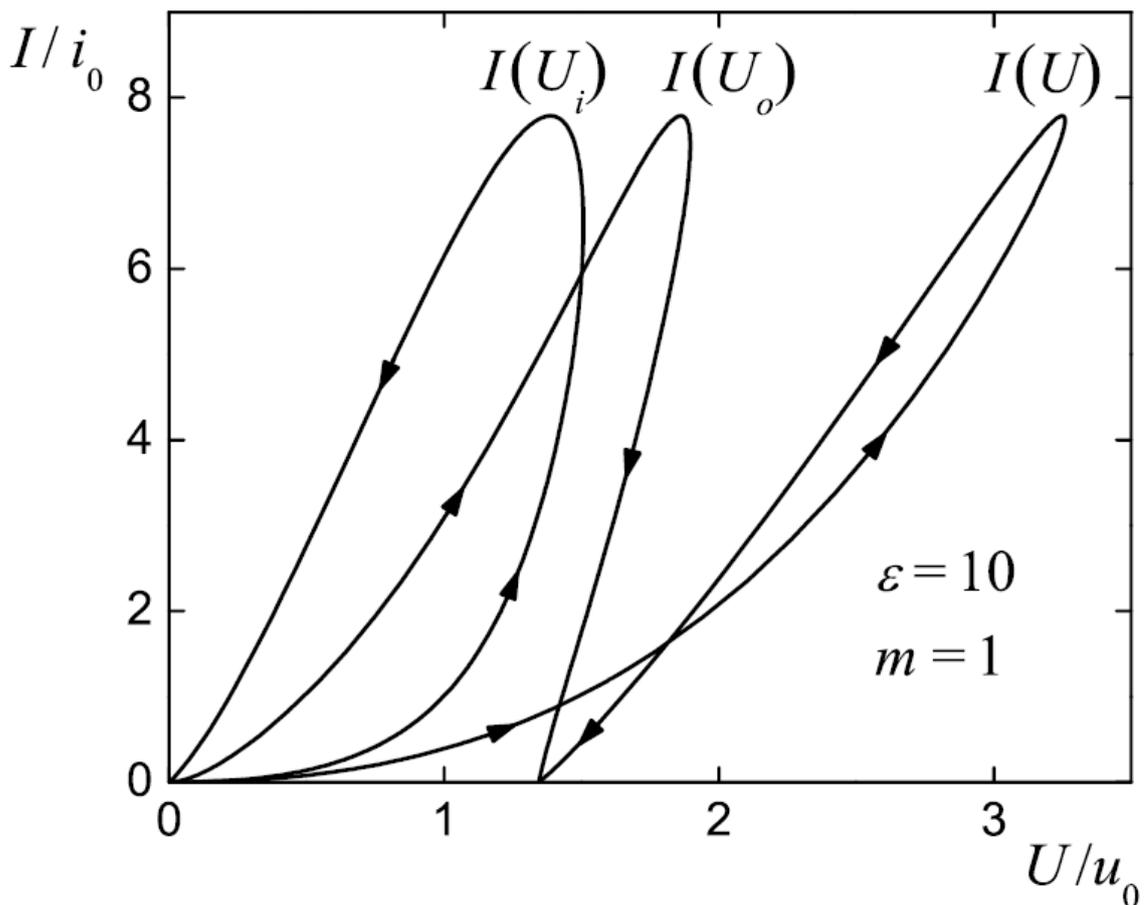


Рис. 2.7. Зависимости тока через конус от напряжения внутри U_i и снаружи U_o и полного напряжения U для $\varepsilon = 10$ и $m = 1$. Направления возрастания

полуугла β показаны стрелками.

Примеры вольтамперных характеристик, соответствующих $m = 1$ и субкритическим ($\varepsilon = 10$) и надкритическим ($\varepsilon = 25$, пунктирные линии) значениям диэлектрической проницаемости представлены на рис. 2.8. Видно, что для $\varepsilon < \varepsilon_c$ ток через конус I , ограниченный объемным зарядом, всегда конечен. Конические структуры на поверхности жидкости не существуют при токах, превышающих пороговое значение. При $\varepsilon < \varepsilon_c$ вольтамперные характеристики разделяются на две отдельные ветви, соответствующие областям малых и больших углов. Обе ветви уходят в бесконечность: ток насыщения I неограниченно возрастает с увеличением U (и также $U_{i,o}$).

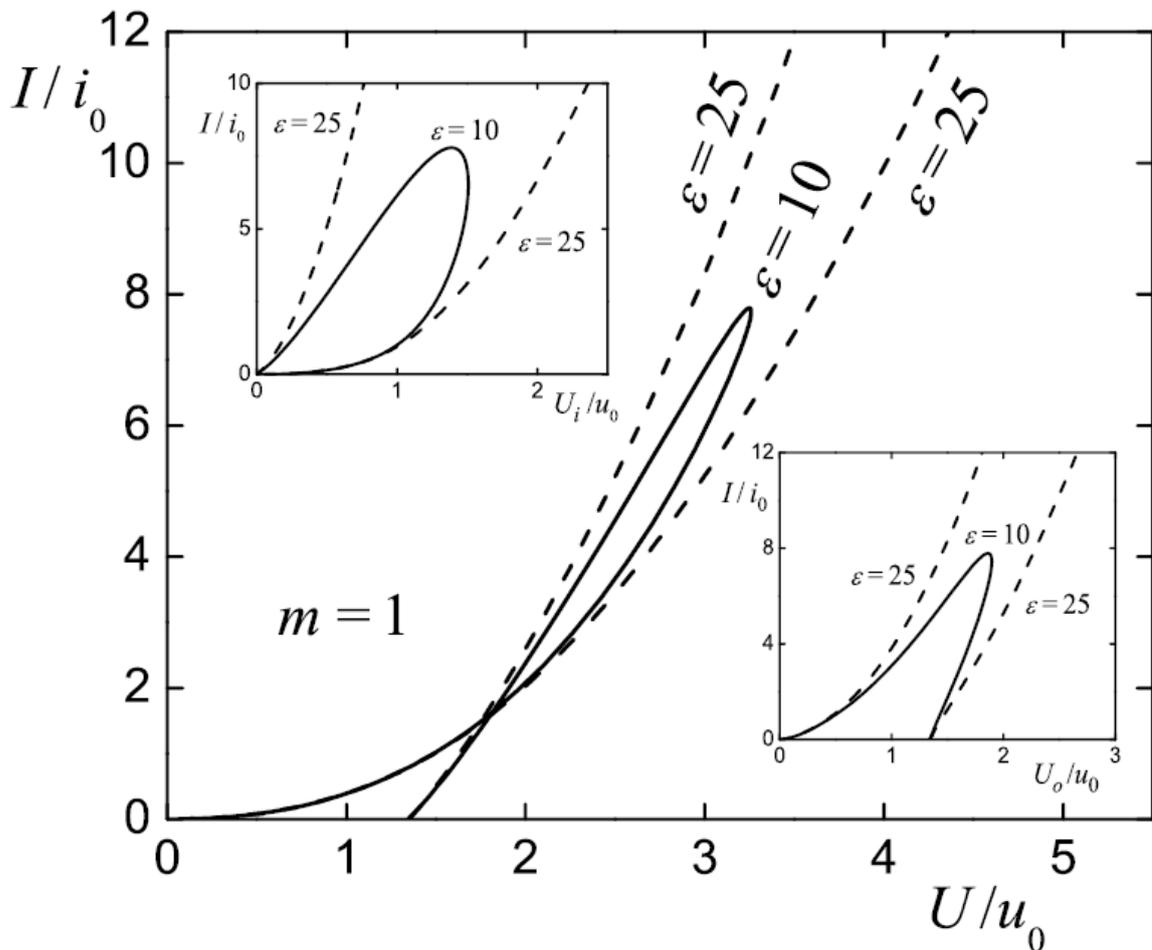


Рис. 8. Вольтамперные зависимости $I(U)$ для $m = 1$ и $\varepsilon = 10, 25$. Во вложениях показаны зависимости $I(U_i)$ и $I(U_o)$.

Как и следовало ожидать из общих соображений, нуль электрического тока ($I = 0$) реализуется при нулевом значении приложенной разности потенциалов ($U = 0$), и при разности потенциалов, соответствующей статическому Тейлоровскому решению (для него $U = U_T \approx 1.35u_0$). В первом случае ток отсутствует, очевидно, из-за полного отсутствия электрического поля, а также электрических зарядов в системе (все коэффициенты A , B , C , D равны нулю). Во втором случае – вследствие того, что поле не проникает в жидкость (вне жидкости оно имеется). Для него $A = 0$ и $B = 0$ при том, что C и D – конечны, т.е. поверхностный свободный заряд имеется, но он не течет к вершине конуса ввиду отсутствия тангенциальной компоненты электрического поля.

В работах [22,23] для пределов $\varepsilon \gg 1$ и $\beta/\pi \ll 1$ в применении приближения “slender body” (характерных пространственный масштаб вдоль оси конуса считался много большим, чем поперек оси) при высоких ε была найдена следующий простая зависимость тока от падения напряжения внутри жидкости (падением напряжения вне жидкости в этом пределе можно пренебречь): $I \propto U_i^2$. Рассмотрим, какова будет эта зависимость в рамках найденных нами точных решений. Итак, рассмотрим предел $\beta \rightarrow 0$ (или $\Theta \rightarrow \pi$) не накладывая ограничений на проницаемость жидкости ε . Асимптотические выражения для угловой зависимости напряжений мы уже нашли выше – формулы (2.27). Найдем аналогичные асимптотики для тока. В выражения (2.28)-(2.30) входят коэффициенты A , B , D . Асимптотика для A уже была найдена – см. (2.26). Для B , D (эти коэффициенты характеризуют плотности анионов и катионов) находим:

$$B \approx \sqrt{\frac{9\alpha\varepsilon_0\beta}{8}}\varepsilon \ln \beta, \quad D \approx \sqrt{\frac{2\varepsilon_0\alpha}{\beta}}. \quad (33)$$

Подставляя (2.26) и (2.33) в (2.29) и (2.30), находим для катионного и анионного токов при малых углах:

$$I_c \approx -2\pi\mu_c\alpha\beta \ln \beta, \quad I_a \approx 3\pi\mu_a\alpha\epsilon\beta^3 \ln^2\beta / 4. \quad (2.34)$$

Из (2.34) видно, что как уже указывалось выше, что токи $I_{c,a} \rightarrow 0$ при $\beta \rightarrow 0$, при этом при малых углах поверхностный ток (катионный) доминирует над объемным (анионным): отношение $I_a / I_c \approx -(3m\epsilon / 8)\beta^2 \ln \beta$ стремится к нулю при $\beta \rightarrow 0$.

Исключая параметр β из (2.27) и (2.34), приходим к трансцендентному выражению для ВАХ внутри конуса при малых углах:

$$I \approx \frac{\pi i_0}{2u_0^2} \frac{U_i^2}{\ln(\sqrt{2}\pi i_0 / u_0) - \ln(U_i / I)}. \quad (2.35)$$

Оно отличается от полученной в работе [Субботин] простой квадратичной зависимости Мотта-Герни $I \propto U_i^2$ существенной логарифмической добавкой в знаменателе правой части (2.35). Примечательно, что в выражении (2.35) отсутствует зависимость от проницаемости среды ϵ . Как следствие, поведение системы универсально близко к точке $I = 0$ и $U = 0$ (что ясно видно из рис. 2.8).

Обсудим характер асимптотического поведения вольтамперных характеристик системы при бесконечных I и U . Как уже было сказано выше, подобная ситуация может реализоваться только при надкритических значениях диэлектрической проницаемости жидкости $\epsilon \geq \epsilon_c$. Как видно из рис. 2.4 и 2.6, бесконечные значения I и U достигаются в двух случаях: для $\beta \rightarrow \beta_1$ и для $\beta \rightarrow \beta_2$. Это обстоятельство определяет присутствие двух ветвей в вольтамперной характеристике (рис. 2.8).

Для $\beta \rightarrow \beta_{1,2}$ имеем $C \rightarrow \infty$ и, как следствие соотношения (2.23), (2.29) и (30), $U_i \sim C$, $U_o \sim C$ и $I \sim C^2$. Исключая C , находим

$$I \approx a_{1,2} (i_0/u_0^2) U_i^2, \quad I \approx b_{1,2} (i_0/u_0^2) U_o^2$$

где коэффициенты $a_{1,2}$ и $b_{1,2}$ соответствуют углам $\beta_{1,2}$. Для этих коэффициентов имеем:

$$a_{1,2} = -\pi (1 + \varepsilon m G(\beta_{1,2})) \sin^2 \beta_{1,2} P_{1/2}^{-1}(-\cos \beta_{1,2}) P'_{1/2}(-\cos \beta_{1,2})$$

$$b_{1,2} = -\pi (1 + \varepsilon m G(\beta_{1,2})) \sin^2 \beta_{1,2} P_{1/2}(-\cos \beta_{1,2}) P'_{1/2}(-\cos \beta_{1,2})$$

Затем мы получаем для зависимости тока I от напряжения $U = U_i + U_o$:

$$I \approx c_{1,2} (i_0/u_0^2) U^2$$

где коэффициенты $c_{1,2}$ связаны с коэффициентами $a_{1,2}$ и $b_{1,2}$ следующим образом:

$$1/\sqrt{c_{1,2}} = 1/\sqrt{a_{1,2}} + 1/\sqrt{b_{1,2}}$$

Таким образом, в формальном пределе бесконечных I и U , реализуется квадратичная зависимость $I \sim U^2$, что является типичным для тока, ограниченного объемным зарядом, в ситуации где носители заряда дрейфуют в пространстве. В отличии от зависимости (2.35), полученной выше, которая соответствует малым I и U , коэффициенты в зависимости (2.36) являются постоянными. Это объясняется тем фактом, что коэффициент в законе Мотта-Герни определяется геометрией системы, которая в рассматриваемом случае на практике прекращает изменяться при больших I и U : угол β фиксируется на одном из двух значений β_1 или β_2 , соответствующих различным ветвям вольтамперной зависимости.

Полученная зависимость (2.36) по своей форме похожа на ту, что получена в работах [22,23]. Для приближенных решений из этих работ, полученных в предельном случае $\beta \ll \pi/2$ и $\varepsilon \gg 1$, ток становится бесконечным при $\beta \approx \sqrt{8/\varepsilon \ln \varepsilon}$ (этот угол примерно равен 8.6° для воды, т.е., $\varepsilon \approx 80$). Фундаментальное отличие нашей работы в том, что она основывается на точных решениях и, следовательно, не имеет ограничения на значения угла β , и ток в ней уходит в бесконечность при двух различных углах, β_1 и β_2 , которые являются корнями уравнения (2.22). Как видно из рис. 2, первый угол принадлежит области сравнительно малых углов, $0 \leq \beta_1 < \beta_c$, а второй – области больших углов, $\beta_c \leq \beta_2 < \beta_T$. С ростом ε угол β_1 уменьшается, а β_2 – увеличивается.

Наши результаты качественно совпадают с результатами [22,23] в области малых углов, но, однако, не совпадают количественно. В частности для воды ($\varepsilon \approx 80$ и $m \approx 0.58$) точная формула дает $\beta_1 \approx 3.0^\circ$ (а также $\beta_2 \approx 39.5^\circ$), что значительно отличается от значения в 8.6° , найденного в [22,23]. Вероятно, эта разница объясняется высокой чувствительностью модели к неточностям в определении распределения электрического поля внутри жидкого конуса.

В заключении раздела дадим значения коэффициентов $a_{1,2}$, $b_{1,2}$ и $c_{1,2}$ для воды:

$$a_1 \approx 1.2, \quad b_1 \approx 2.4, \quad c_1 \approx 0.52,$$

$$a_2 \approx 37.7, \quad b_2 \approx 1.2, \quad c_2 \approx 0.89.$$

3. Конические образования на поверхности жидкости с учетом эмиссии с вершины конуса

Совмещая подходы, развитые в работах [19] и [21-23], рассмотрим коническое образование на поверхности жидкого диэлектрика с ионной проводимостью во внешнем электрическом поле. Ионы движутся по

поверхности конуса к вершине, а заряженные частицы (капли) испускаемые с вершины конуса дрейфуют через окружающий газ.

3.1 Основные уравнения

Будем полагать, что во внешнем электрическом поле жидкость принимает форму конуса с углом раствора 2β . Вершина конуса испускает спрей из идентичных заряженных капель с углом разлета 2γ (см. рис. 3.1). Эти капли дрейфуют вне жидкого конуса в окружающем газе.

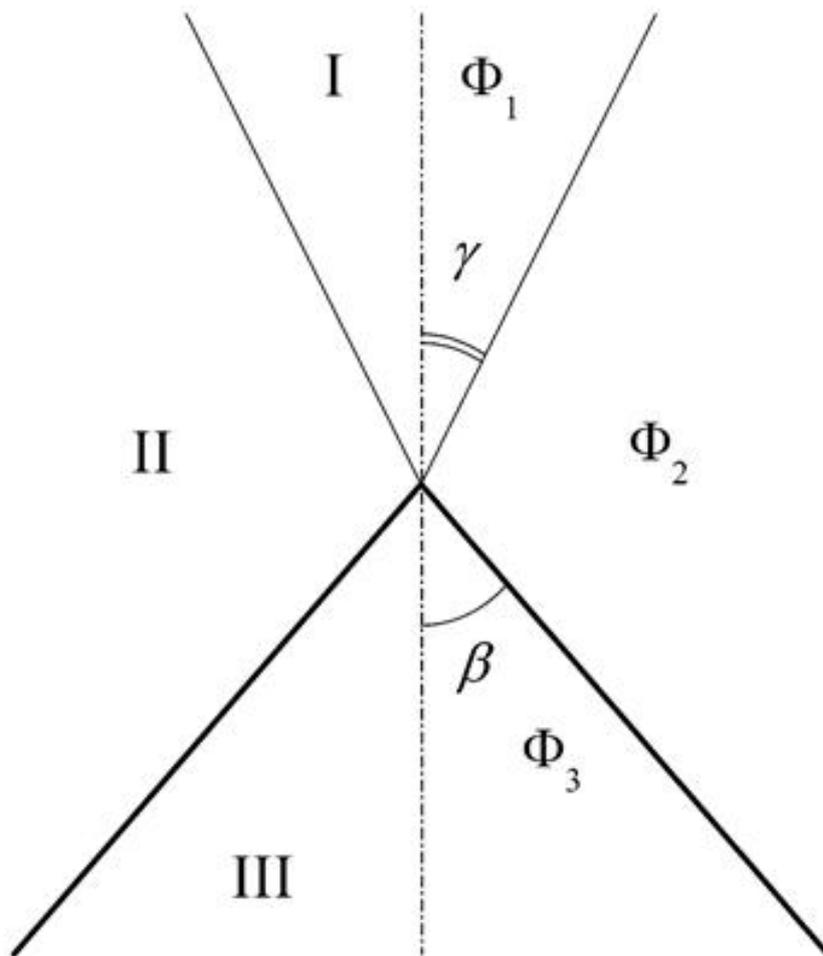


Рис. 3.1. Схематическая геометрия задачи

Сформулируем основные уравнения, описывающие распределение электрического поля с учетом объемного и поверхностного зарядов. Как и в

предыдущем разделе, удобно будет использовать сферическую систему координат, где R – это расстояние от вершины конуса, а θ – полярный угол. В области спрея $0 \leq \theta \leq \gamma$ (область I на рис. 1) присутствует объемный заряд с плотностью ρ . Объемный заряд отсутствует в области $\gamma < \theta < \pi - \beta$ (область II), а также в объеме жидкости $\pi - \beta \leq \theta \leq \pi$ (область III). Поверхность жидкого конуса определяется условием $\theta = \pi - \beta$. На поверхности присутствует заряд с плотностью σ , вызванный дрейфом ионов (см. также исх. [21]).

Обозначим $\Phi_{1,2,3}$ как потенциалы электрического поля в соответствующих областях I, II и III. Вслед за [19], полагаем что распределение электрического поля в области спрея однородно по углу (или, иными словами, сферически симметрично), $\Phi_1 = \Phi_1(R)$ и $\rho = \rho(R)$. Оно описывается уравнением Пуассона

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \Phi_1}{\partial R} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}, \quad (3.1)$$

где ε_0 – электрическая постоянная (диэлектрическую проницаемость окружающего газа считаем равной единице). Уравнение (3.1) является обыкновенным дифференциальным уравнением по переменной R . В областях II и III, где электрический заряд отсутствует, электрический потенциал является гармоническим. Распределение электрического потенциала там описывается уравнениями Лапласа,

$$\frac{\partial^2 \Phi_{2,3}}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial \Phi_{2,3}}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \Phi_{2,3}}{\partial \theta^2} + \frac{\cot \theta}{R^2} \frac{\partial \Phi_{2,3}}{\partial \theta} = 0. \quad (3.2)$$

Запишем необходимые граничные условия. Тангенциальные компоненты напряженности электрического поля внутри и снаружи жидкого конуса совпадают на его границе, а нормальная компонента испытывает разрыв пропорциональный поверхностной плотности свободного заряда,

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial R} = \frac{\partial\Phi_3}{\partial R}, \quad \frac{1}{R} \left(\frac{\partial\Phi_2}{\partial\theta} - \varepsilon \frac{\partial\Phi_3}{\partial\theta} \right) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \quad \theta = \pi - \beta. \quad (3.3)$$

На границе области разлета спрея электрический потенциал должен быть неразрывным, так что

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial R} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial R}, \quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial\theta} = 0, \quad \theta = \gamma. \quad (3.4)$$

Вектор электрического поля имеет только радиальную компоненту на оси симметрии жидкого конуса, т.е.

$$\frac{\partial\Phi_3}{\partial\theta} = 0, \quad \theta = \pi. \quad (3.5)$$

Обозначим μ_v и μ_s как подвижности заряженных капель, движущихся через газ, и, соответственно, ионов, движущихся по поверхности жидкости. Они дрейфуют с радиальными скоростями

$$V_v = -\mu_v \frac{\partial\Phi_1}{\partial R}, \quad V_s = -\mu_s \frac{\partial\Phi_3}{\partial R} \Big|_{\theta=\pi-\beta}.$$

Учитывая эти соотношения, уравнения непрерывности для капель и ионов запишутся следующим образом

$$\rho \left(\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial R^2} + \frac{2}{R} \frac{\partial\Phi_1}{\partial R} \right) + \frac{\partial\rho}{\partial R} \frac{\partial\Phi_1}{\partial R} = 0, \quad (3.6)$$

$$\sigma \left(\frac{\partial^2\Phi_3}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial\Phi_3}{\partial R} \right) + \frac{\partial\sigma}{\partial R} \frac{\partial\Phi_3}{\partial R} \Big|_{\theta=\pi-\beta} = 0. \quad (3.7)$$

Различия в коэффициентах объясняются тем фактом, что капли движутся в объеме в области спрея (т.е., их движение трехмерное), а ионы движутся по поверхности жидкого конуса (их движение двумерное).

И, наконец, условие равновесия свободной поверхности жидкости в виде баланса

$$p_S = p_E \quad (3.8)$$

между капиллярным и электростатическим давлениями [24]

$$p_S = \alpha R^{-1} \cot \beta,$$

$$p_E = \frac{\varepsilon_0}{2} \left(\frac{1}{R^2} \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} \right)^2 - \frac{\varepsilon}{R^2} \left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial \theta} \right)^2 + (\varepsilon - 1) \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial R} \right)^2 \right) \Bigg|_{\theta=\pi-\beta}$$

где α – коэффициент поверхностного натяжения жидкости. Это уравнение позволяет определить угол раствора конуса.

Система уравнений завершается условием равенства электрических токов,

$$I_s = I_v, \quad (3.9)$$

протекающего по поверхности жидкого конуса,

$$I_s = 2\pi R \mu_s \sin \beta \sigma \frac{\partial \Phi_3}{\partial R} \Bigg|_{\theta=\pi-\beta},$$

и через окружающий газ,

$$I_v = -2\pi R^2 \mu_v (1 - \cos \gamma) \rho \frac{\partial \Phi_1}{\partial R}$$

Уравнения (3.1)-(3.9) позволяют определить зависимость между углами β и γ и параметрами μ_v , μ_s , и ε .

3.2 Точные решения

Из условия баланса на поверхности жидкого конуса (3.8) видно, что напряженность электрического поля, как и для конуса Тейлора, должна

уменьшаться с расстоянием R по закону $R^{-1/2}$, а потенциалы поля внутри и снаружи жидкости должны удовлетворять законам $\Phi_{1,2,3} \propto R^{1/2}$. Как видно из (3.1), зависимость $\rho \propto R^{-3/2}$ должна выполняться для плотности объемного заряда. Важно отметить, что это соотношение автоматически удовлетворяет уравнению непрерывности (3.6). Далее, из (3.3) следует, что для поверхностной плотности заряда должна выполняться зависимость $\sigma \propto R^{-1/2}$, которая в свою очередь полностью соотносится с уравнением непрерывности (3.7). Тот факт, что классический закон $\Phi \propto R^{1/2}$ не нарушается при учете объемного заряда частиц, испускаемых с вершины конуса Тейлора и дрейфующих в конической области, был установлен в работе [19]. В [21] было показано, что этот закон остается в силе также и при учете тока ионов на поверхности.

Подстановка $\Phi = f(\theta)R^{1/2}$ (она соответствует требуемой зависимости; f – некоторая функция) сводит уравнение Лапласа (3.2) к обыкновенному дифференциальному уравнению на угловое распределение потенциала электрического поля

$$3f / 4 + f_{\theta\theta} + f_{\theta} \cot \theta = 0.$$

Общее решение которого

$$f = C_1 P_{1/2}(\cos \theta) + C_2 P_{1/2}(-\cos \theta),$$

где $C_{1,2}$ – некоторые константы и $P_{1/2}$ – функция Лежандра степени $1/2$.

Используя подстановки

$$\Phi_1 = AR^{1/2}, \quad \Phi_2 = C_1 P_{1/2}(\cos \theta)R^{1/2} + C_2 P_{1/2}(-\cos \theta)R^{1/2},$$

$$\Phi_3 = C_3 P_{1/2}(-\cos \theta)R^{1/2}, \quad \rho = BR^{-3/2}, \quad \sigma = DR^{-1/2},$$

можно свести уравнения (3.1)-(3.9) к системе алгебраических уравнений на постоянные A , B , $C_{1,2,3}$ и D . Решая систему, мы находим зависимость между

параметрами модели (углами β и γ , диэлектрической проницаемостью жидкости ε и отношением подвижностей $m \equiv \mu_v / \mu_s$) которая описывается довольно сложным выражением

$$\frac{(1 - \varepsilon - G(\gamma)G(\beta) - \varepsilon F(\beta)G(\gamma))(F(\beta)G(\gamma) + 1)}{(G(\gamma) + F(\gamma))^2} = \frac{3m(1 - \cos \gamma)P_{1/2}^2(\cos \gamma)}{4 \sin^2 \beta P_{1/2}(\cos \beta)P'_{1/2}(\cos \beta)} \quad (10)$$

Где мы обозначили

$$F(x) = \frac{P_{1/2}(-\cos x)}{P_{1/2}(\cos x)}, \quad G(x) = \frac{P'_{1/2}(-\cos x)}{P'_{1/2}(\cos x)}$$

и $P'_{1/2}$ - производная функции Лежандра по аргументу.

Формула (3.10) определяет зависимость между углом конуса β и углом разлета частиц γ , которая может быть получена для различных значений m и ε . На этом основании можно классифицировать несколько частных и предельных случаев.

3.3 Угловые зависимости при конечных значениях m

В этой ситуации в свою очередь существуют три случая, соответствующие различным значениям диэлектрической проницаемости ε :

- 1) $\varepsilon > \varepsilon_c$

Зависимость для $\varepsilon = 25$ и конечных значений m показана на рис. 3.2. Можно увидеть, что решение имеет несколько ветвей; кроме того, их структура значительно меняется с изменением отношения подвижностей m . Ясно что электрический ток через конус отсутствует при $\gamma = 0$. Эти нулевые точки можно идентифицировать как решения в работе Рамоса и Кастильяноса [17] для идеальной диэлектрической жидкости и решение

Тейлора [13] для идеально проводящей жидкости. Верхняя (монотонная) ветвь решения для $m = 0.2$ представляет собой деформацию решения, полученного Де Ла Морой для проводящего конуса [19] (они совпадают в пределе $m \rightarrow 0$). В любом случае, возможные полууглы стационарных конических формирований принадлежат к диапазону $0^\circ < \beta < \beta_T \approx 49.3^\circ$, т.е. они не могут превышать угол конуса Тейлора. Также является возможным найти значение m при котором оба типа зависимостей переходят друг в друга.

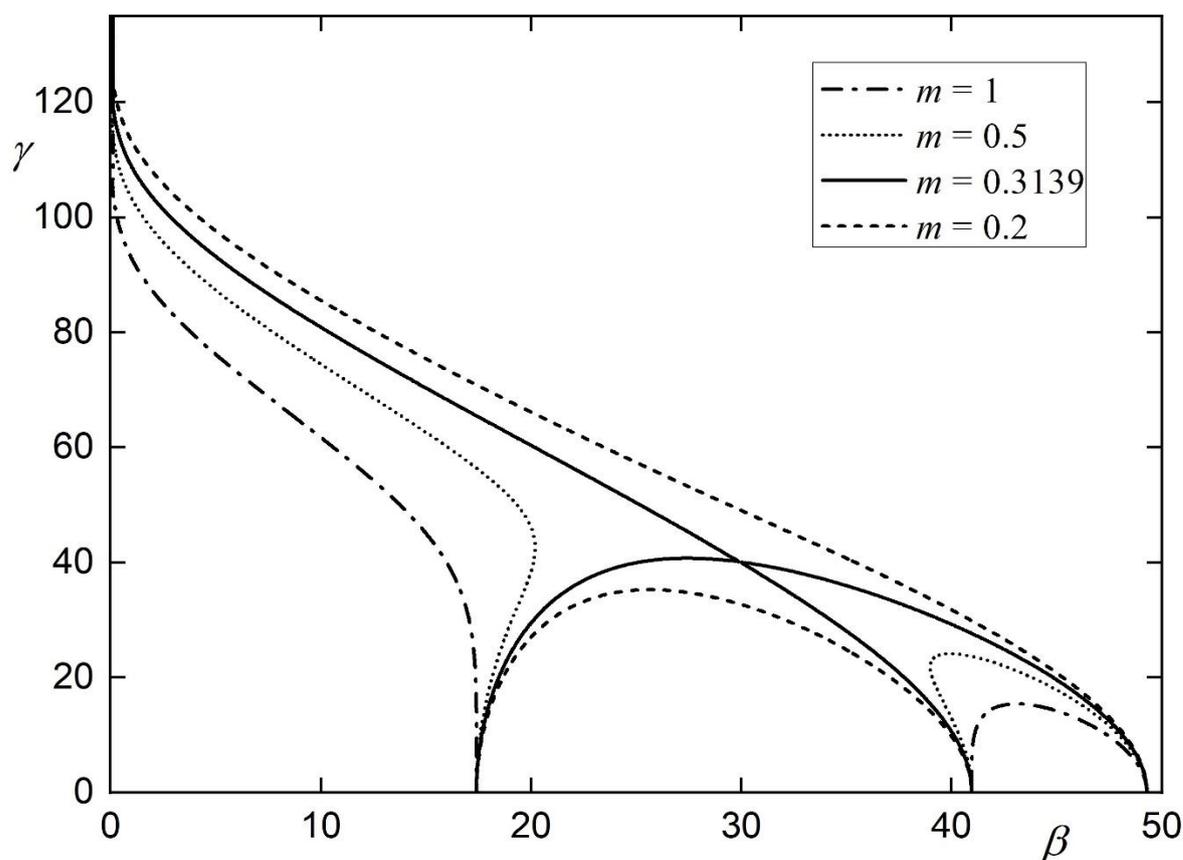


Рис. 3.2 Зависимость между углом жидкого конуса β и углом спрея γ для $\varepsilon = 25$ и $m = 0.2, 0.5, 1$.

2) $\varepsilon = \varepsilon_c$

Полученная зависимость между γ и β для значений $m = 0.5, 0.8, 1, 1.5$ показана на рис. 3.3; при $0 \leq m < 1$ она носит монотонный характер при

невысоких значениях m , но с увеличением m появляется минимум. Ближе к $m=1$ минимум превращается в “клюв”, который касается оси абсцисс в точности при $m=1$ и также приходится на угол $\beta = 30^\circ$, как и сепаратриса на рис. 3.2.

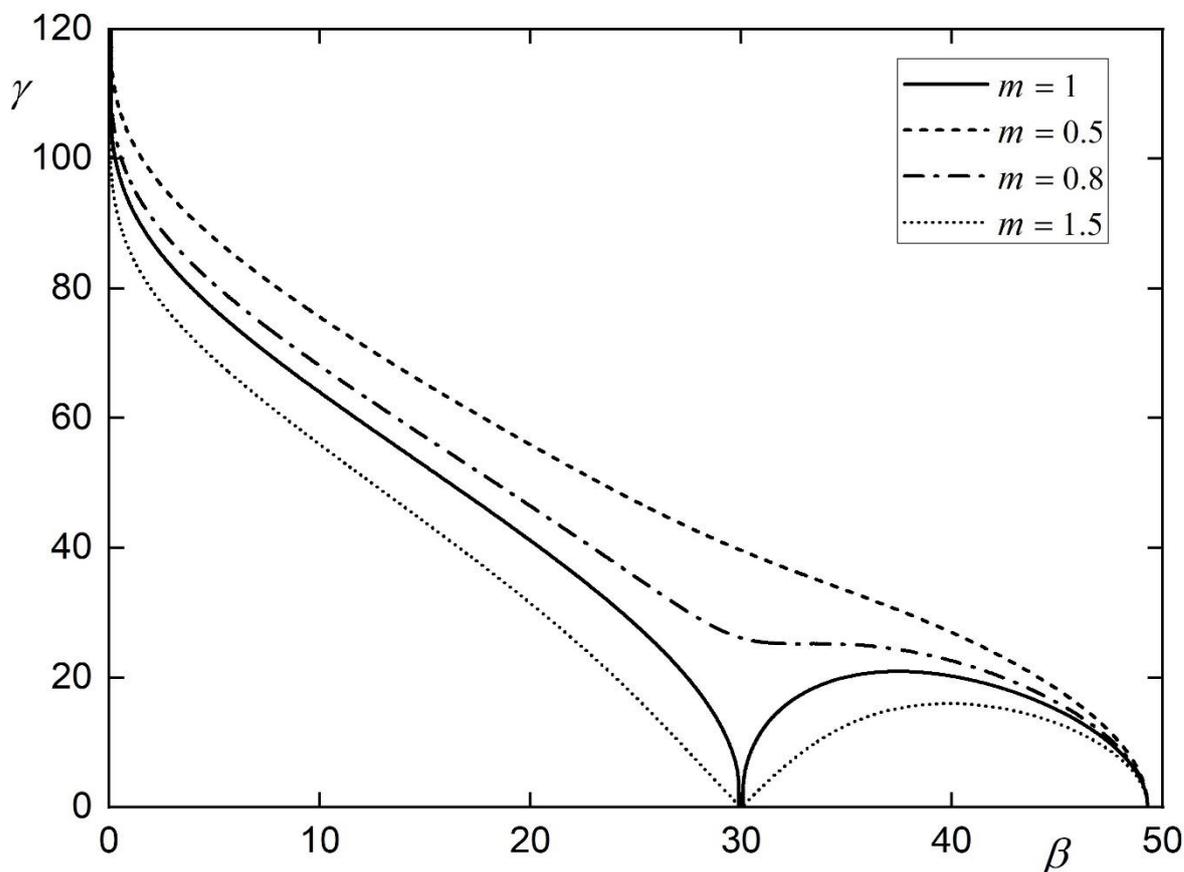


Рис. 3.3 Зависимость между углом жидкого конуса β и углом спрея γ для $\varepsilon = 17.6$ и $m = 0.5, 0.8, 1.5$.

3) $\varepsilon < \varepsilon_c$

При различных значениях m существует только монотонно убывающая ветвь. При уменьшении m она сводится к пределу [19], о котором будет подробнее сказано в следующем пункте.

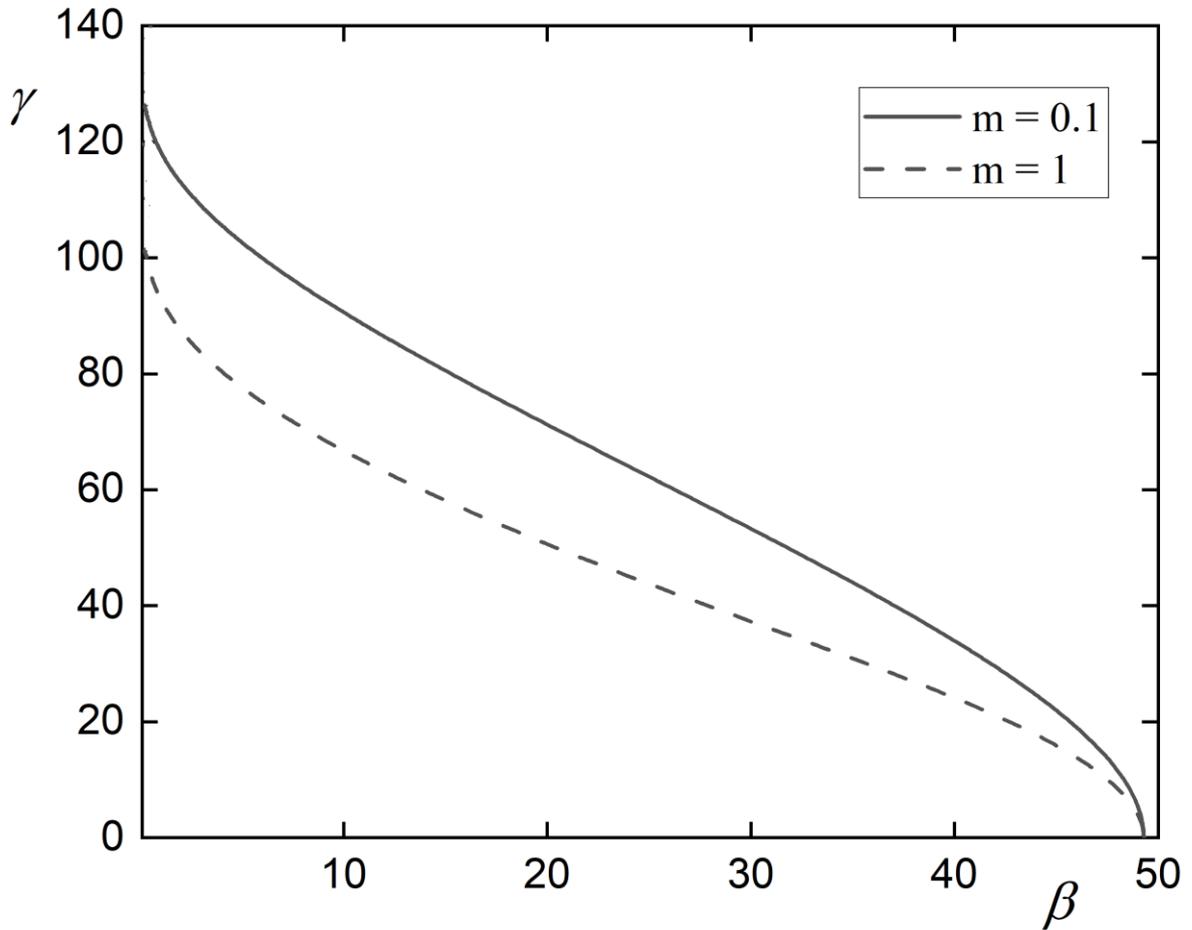


Рис. 3.4 Зависимость между углом жидкого конуса β и углом спрея γ для $\varepsilon = 5$ и $m = 0.1, 1$.

3.4 Анализ предельных случаев $m = 0$ и $m \rightarrow \infty$

1) Случай $m = 0$

В этом пределе ролью свободного заряда на поверхности можно пренебречь. Уравнение (3.10) факторизуется. Имеется две ветви

$$F(\beta)G(\gamma) + 1 = 0 \quad (3.11)$$

$$1 - \varepsilon - G(\gamma)G(\beta) - \varepsilon F(\beta)G(\gamma) = 0 \quad (3.12)$$

Уравнение (3.11) соответствует известному решению Де Ла Моры [19], учитывающему влияние объемного заряда капель на конус на поверхности идеально проводящей жидкости. Оно запишется как

$$\frac{P_{1/2}(-\cos \beta) P'_{1/2}(-\cos \gamma)}{P_{1/2}(\cos \beta) P'_{1/2}(\cos \gamma)} + 1 = 0$$

В нашем случае (жидкость – диэлектрическая) эквипотенциальность границы обеспечивается имеющимся свободным поверхностным зарядом (ионы, дрейфующие по границе). При этом на границе нет поляризационного заряда. Эта ветвь, как известно, существует в диапазоне углов $0^\circ < \beta < \beta_T \approx 49.3^\circ$. Для $\beta = \beta_T$ имеем $\gamma = 0$ (решение переходит в Тейлоровское), а для $\beta \rightarrow 0$ будет $\gamma \rightarrow \pi$.

Вторая ветвь соответствует режиму, когда на поверхности доминирует поляризационный заряд (плотность свободного заряда формально равна нулю; тем не менее он имеется, обеспечивая протекание тока через конус – напомним, для $m = 0$ – подвижность ионов – формально бесконечна и для протекания конечного тока достаточно бесконечно малой плотности заряда).

Примечательно, что в формальном пределе $\varepsilon \rightarrow \infty$ ветвь (3.12) сближается с (3.11). Действительно, (3.12) можно переписать как

$$F(\beta)G(\gamma) + 1 = \frac{1 - G(\gamma)G(\beta)}{\varepsilon}$$

Видно, что при в этом пределе правая часть зануляется и получающееся выражение совпадает с (3.11). Этот предельный переход обусловлен тем, что нормальное электрическое поле не проникает среду с бесконечной проницаемостью (поле экранируется поляризационным зарядом), и, формально, распределение поля будет таким же, как и для жидкости со проводящей границей, где экранировка осуществляется свободным поверхностным зарядом.

Эта ветвь дает известное решение Рамоса и Кастельяноса в пределе $\gamma = 0$, когда объемный заряд над конусом исчезает. Поскольку $G(\gamma) \rightarrow \infty$ при $\gamma \rightarrow 0$, то уравнение (3.12) примет вид

$$G(\beta) + \varepsilon F(\beta) = 0$$

или

$$\frac{P'_{1/2}(-\cos \beta) P_{1/2}(\cos \beta)}{P'_{1/2}(\cos \beta) P_{1/2}(-\cos \beta)} = -\varepsilon \quad (3.13)$$

что и соответствует решению [17] задающему углу конуса в зависимости от проницаемости. Как известно, уравнение (3.13) существует лишь при $\varepsilon \geq \varepsilon_c \approx 17.6$. Решение единственное $\beta = 30^\circ$ при $\varepsilon = \varepsilon_c$ и два решения $\beta_{1,2}$ при больших проницаемостях. При $\varepsilon \rightarrow \infty$ имеем $\beta_1 \rightarrow 0$ и $\beta_2 \rightarrow \beta_T$. Решение для случаев, когда обе ветви существуют, показано на рис. 3.5. причем верхние ветви совпадают при различных значениях ε .

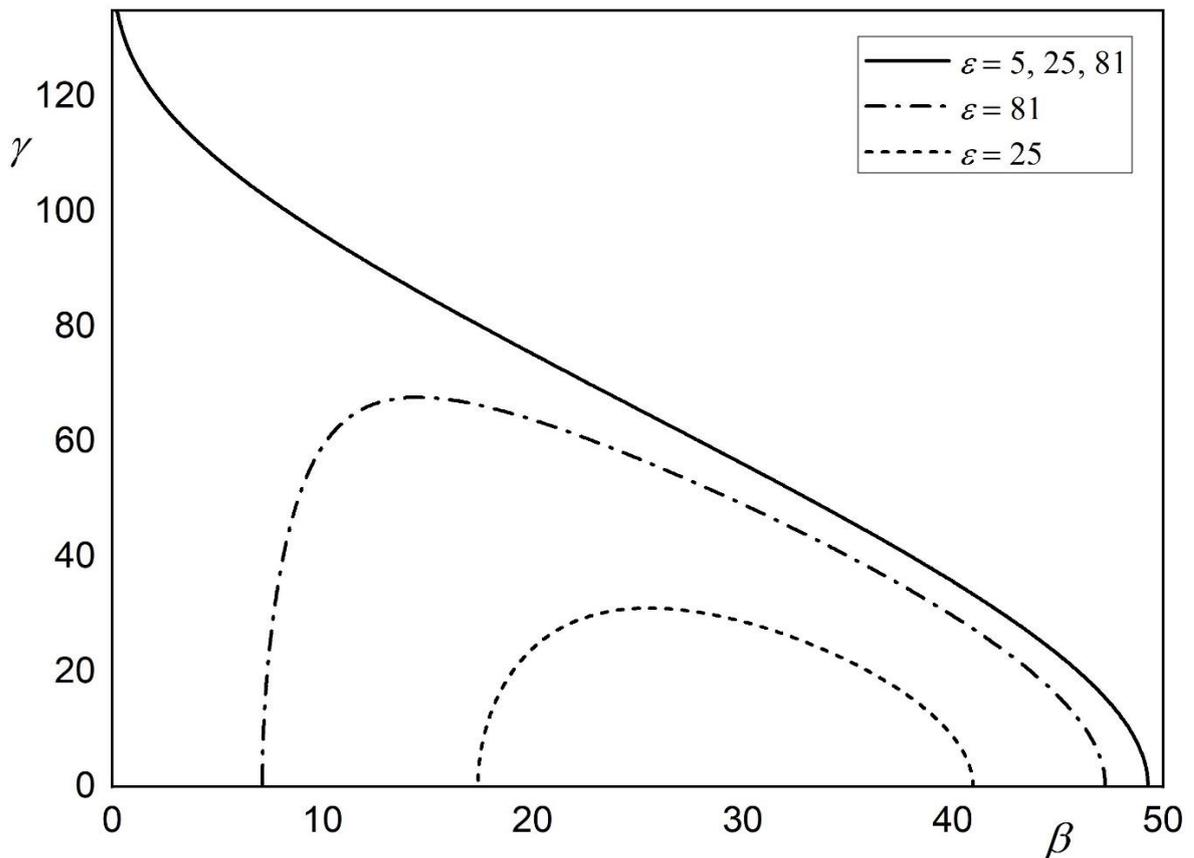


Рис. 3.5. Зависимость между углом жидкого конуса β и углом спрея γ для случая $m = 0$ при $\varepsilon = 5, 25, 81$.

2) Случай $m \rightarrow \infty$

В этом пределе роль объемного заряда над конусом в распределение поля – пренебрежимо мала (в этом случае, с точки зрения физической интерпретации результатов речь идет не о спрее, а о дрейфе ионов в окружающем газе). Для этого случая, как можно понять из структуры (3.10), будет $\gamma \rightarrow 0$. Раскладывая в этом пределе (3.10), получим для угла γ в основном порядке:

$$\gamma^2 \approx -\frac{8}{3m} \sin^2 \beta P_{1/2}(-\cos \beta) P'_{1/2}(\cos \beta) (G(\beta) + \varepsilon F(\beta))$$

Видно, что угол γ убывает с ростом отношения подвижностей как $\gamma \propto 1/\sqrt{m}$, причем решения существуют лишь в ситуации, когда правая часть этого выражения – неотрицательна, т.е. выполняется (считаем $\beta < \beta_T$)

$$G(\beta) + \varepsilon F(\beta) \geq 0 \tag{3.14}$$

Это неравенство определяет диапазон параметров, при которых решения существуют. Граница задается знаком равенства в (3.14), что совпадает с решением Рамоса-Кастелляноса (3.13).

В таком случае имеем, что решения имеются в диапазоне углов $0^\circ < \beta < \beta_T \approx 49.3^\circ$ при $\varepsilon \leq \varepsilon_c \approx 17.6$, а при $\varepsilon > \varepsilon_c$ только в областях $0^\circ \leq \beta \leq \beta_1$ и $\beta_2 \leq \beta \leq \beta_T$. Это согласуется с результатом [22,23], был обнаружен аналогичный диапазон существования физически осмысленных решений в отсутствие объемного заряда ($\gamma = 0$ в терминах настоящей работы). На рисунке 3.6 показана зависимость для $\varepsilon = 5, \varepsilon_c, 25, 81$ при $m = 100$.

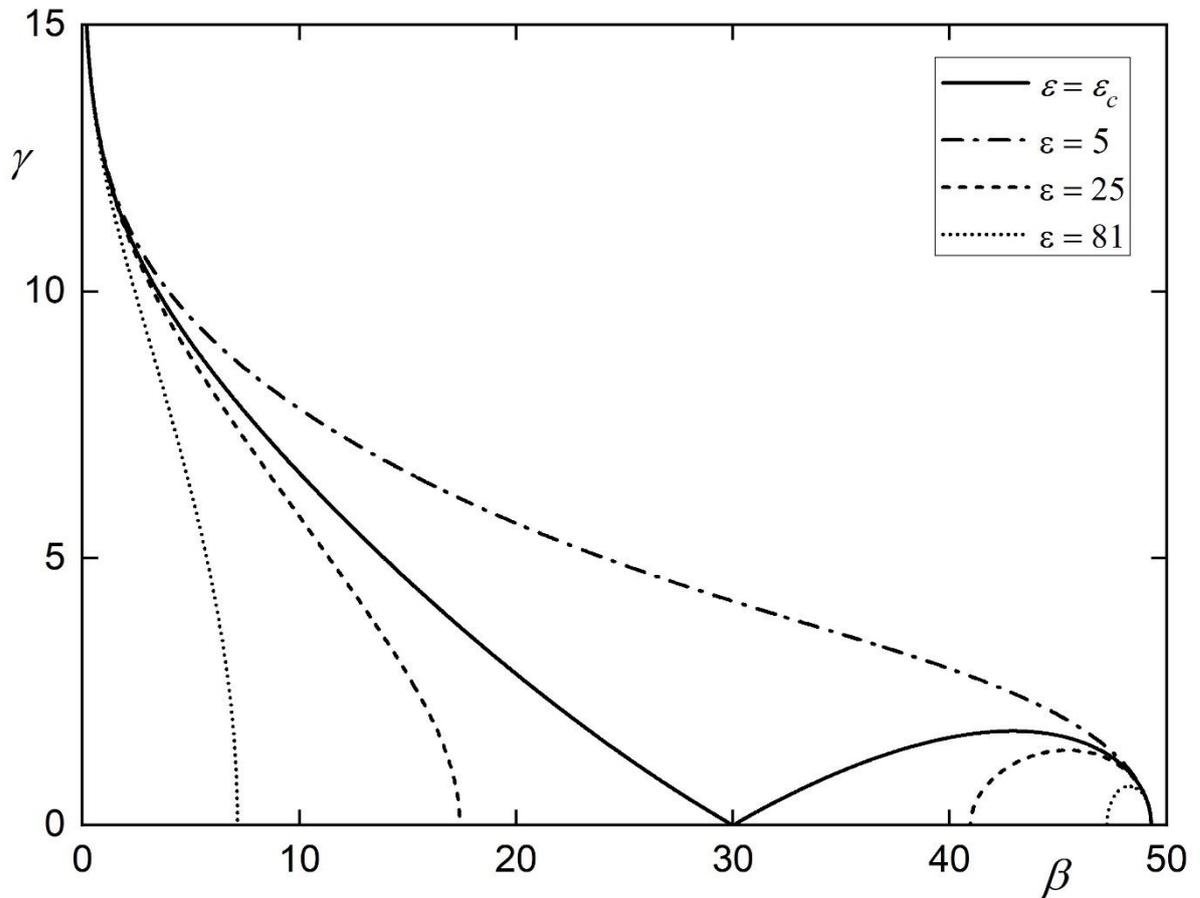


Рис. 3.6. Зависимость между углом жидкого конуса β и углом спрея γ для случая $m = 100$ при $\varepsilon = 5, \varepsilon_c, 25, 81$.

Из приведенных выше рассуждений можно сделать еще один важный вывод. Как понятно, при $\gamma \rightarrow 0$ справедливо (3.10) и без ограничений на m . Тогда нуль $\gamma = 0$ реализуется (с учетом факторизации (3.10)) при $P_{1/2}(-\cos \beta) = 0$, либо $G(\beta) + \varepsilon F(\beta) = 0$, что соответствует $\beta = \beta_1, \beta_2, \beta_T$, т.е. решениям Рамоса-Кастелляноса и Тейлора.

4. Заключение

В представленной работе изучались стационарные конические структуры, возникающие на поверхности жидкости с ионной проводимостью, под действием внешнего электрического поля. Было рассмотрено две задачи: конус с током ионов на поверхности и в объеме жидкости и конус с током на поверхности и эмиссией заряженных частиц с вершины. Для обеих задач были записаны основные уравнения, проведена автомодельная редукция этих уравнений, сводящая исходную двумерную задачу в частных производных к обыкновенным дифференциальным уравнениям. В обоих случаях было найдено точное решение, выражающееся через функции Лежандра порядка $\frac{1}{2}$. Подстановка в граничные условия дает систему уравнений, которая связывает между собой основные характеристики рассматриваемых задач.

Для первой задачи был найден ток насыщения через коническое образование. Этот ток ограничен одновременно объемным и поверхностным зарядом ионов противоположных знаков, дрейфующих через жидкость. Полуугол раствора конуса не превышает угол Тейлора $\beta_T \approx 49.3^\circ$. Для сравнительно малых диэлектрических проницаемостей, $1 < \varepsilon < \varepsilon_c \approx 16.3$, возможные углы пролегают во всем интервале $0 < \beta < \beta_T$. Ток насыщения равен нулю на концах этого интервала и достигает максимального значения внутри него (см. рис. 2.6). Для больших проницаемостей, $\varepsilon > \varepsilon_c$, решения существуют только в областях малых ($0 < \beta < \beta_1$) и больших ($\beta_2 < \beta < \beta_T$) углов и отсутствуют в области средних углов $\beta_1 \leq \beta \leq \beta_2$ (зависимость пороговых углов $\beta_{1,2}$ от ε показана на рис. 2.2) Электрический ток уходит в бесконечность когда β достигает β_1 , или β_2 .

Также были найдены вольтамперные характеристики рассматриваемой системы. Их форма определяется параметрами задачи: диэлектрической проницаемостью ε , подвижностями анионов и катионов μ_a и μ_c . Эти зависимости оказываются достаточно сложными: они состоят из различных

самопересекающихся ветвей, см. рис. 2.7 и 2.8. В формальном пределе большого тока I и напряжения U , который реализуется только при $\varepsilon > \varepsilon_c$, вольтамперные характеристики асимптотически подчиняются закону Мотта-Герни, $I \sim U^2$. В этом случае две различные ветви вольтамперных характеристик соответствуют сосуществованию малых ($\beta \rightarrow \beta_1$) и больших ($\beta \rightarrow \beta_2$) углов жидкого конуса. Для $\varepsilon < \varepsilon_c$ ток, ограниченный объемным зарядом, I и напряжение U всегда конечны. Угол β плавно меняется в зависимости от приложенного напряжения, и, следовательно, вольтамперные характеристики отличаются от закона Мотта-Герни, который справедлив для систем с неподвижной геометрией [25].

Для второй задачи полученное точное решение позволяет определить зависимость между полууглом раствора конуса β и полууглом разлета частиц γ . Эти зависимости найдены для различных значений таких параметров как диэлектрическая проницаемость жидкости ε и отношение подвижностей носителей заряда m . Как видно из рис. 3.2, они носят довольно сложный характер и существует два типа зависимостей, которые переходят друг в друга при угле $\beta = 30^\circ$. При этом угле также существует особая точка при проницаемости $\varepsilon = 17.6$ в которой возникает “клюв” с увеличением отношения m , а угол разлета частиц γ уходит в 0 при $m = 1$. Решение также включает в себя случаи предельных отношений подвижностей носителей заряда. Случай $m = 0$ дает две ветви решений: верхняя соответствует работе [19], учитывающей влияние объемного заряда частиц, движущихся в окружающем газе, а нижняя соответствует решению Рамоса и Кастельяноса [17] при $\gamma = 0$. В пределе $m \rightarrow \infty$ очень слабо влияние объемного заряда. Решения имеются в диапазоне $0^\circ < \beta < \beta_T \approx 49.3^\circ$ при $\varepsilon \leq \varepsilon_c \approx 17.6$ и в областях $0^\circ \leq \beta \leq \beta_1$ и $\beta_2 \leq \beta \leq \beta_T$ при $\varepsilon > \varepsilon_c$, что согласуется с решениями [22,23] в отсутствии объемного заряда.

В завершение стоит отметить, что для обеих задач был получен большой объем информации о системе, который требует дальнейшего

исследования. В первой задаче можно провести более подробный анализ вольтамперных характеристик, чтобы установить какая из ветвей реализуется на практике. Касательно второй задачи является возможным построить угловые зависимости для тока и напряжения, а также вольтамперные характеристики с последующим их анализом.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Tonks L. A theory of liquid surface retraction by a uniform electric field. // *Phys. Rev.*, 1935. V.48. P.562-568.
2. Френкель Я.И. К теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме. // *ЖЭТФ*, 1936, Т. 6, В. 4, С. 347–350.
3. Melcher J.R. *Field-coupled surface waves*. // MIT Press, Cambridge, Mass., 1963, 190 p.
4. Месяц Г.А. *Эктоны. Часть 1*, Екатеринбург, Наука, 1993, 184 с.
5. Габович М.Д. Жидкометаллические эмиттеры ионов. // *УФН*, 1983, Т. 140, В. 1, С. 137–151.
6. Габович М.Д., Порицкий В.Я. Исследование нелинейных волн на поверхности металла, находящегося в электрическом поле // *Письма в ЖЭТФ*, 1981, Т. 33, В. 6. С. 320–324.
7. Шлиомис М.И. Магнитные жидкости. // *УФН*, 1974, Т. 112, В. 3, С. 427–458.
8. Батраков А.В. Влияние состояния поверхности электродов на характеристики вакуумного пробоя. Дисс. на соиск. уч. степени к.ф.-м.н., ИСЭ СО РАН, Томск, 1997, 132 с.
9. Кузнецов Е.А, Спектор М.Д. О существовании гексагонального рельефа на поверхности жидкого диэлектрика во внешнем электрическом поле. // *ЖЭТФ*, 1976, Т. 71, В. 1(7), С. 262–272.
10. Шикин В. Б., Монарха Ю.П. *Двумерные заряженные системы в гелии*. Москва, Наука, 1989, 160 с.
11. Зубарев Н.М. Формирование особенностей на свободной поверхности жидкостей в электрическом поле. Дисс. на соиск. уч. степени д.ф.-м.н., ИЭФ УрО РАН, Екатеринбург, 2002.

12. Суворов В.Г. Электрогидродинамическая и тепловая неустойчивость поверхности проводящей жидкости. Дисс. на соиск. уч. степени к.ф.-м.н., ИЭФ УрО РАН, Екатеринбург, 2001, 119 с.
13. Taylor G. Disintegration of water drops in an electric field. // Proc. R. Soc. A, 1964, V.280, P. 383–397.
14. Zeleny J. The Electrical Discharge from Liquid Points, and a Hydrostatic Method of Measuring the Electric Intensity at Their Surfaces. // Physical Review. 3 (2): 69, 1914.
15. Wilson C. T., Taylor G. The bursting of soap bubbles in a uniform electric field. // Proc. Cambridge Philos. Soc. 22 (5): 728, 1925.
16. Macky W. A. Some Investigations on the Deformation and Breaking of Water Drops in Strong Electric Fields. // Proceedings of the Royal Society A. 133 (822): 565–587, Oct. 1931.
17. Ramos A., Castellanos A. Conical points in liquid-liquid interfaces subjected to electric fields. // Phys. Lett. A 184, 268 (1994).
18. Li H., Halsey T.C., Lobkovsky A. Singular shape of a fluid drop in an electric or magnetic-field. // Europhysics letters, 27(8), 1994, pp. 575-580
19. Fernandez De La Mora J. The effect of charge emission from electrified liquid cones. // Fluid Mech. 243, 561 (1992).
20. Boltachev G.Sh., Zubarev N.M., Zubareva O.V. Space charge influence on the angle of conical spikes developing on a liquid-metal anode. // Physical Review E 77, 056607, 2008.
21. Субботин А.В. Электрогидродинамика конусов на поверхности жидкости. // Письма в ЖЭТФ, том 100, вып. 10, с. 741 – 746
22. A.V. Subbotin, A.N. Semenov, Volume-charged cones on a liquid interface in an electric field, JETP Lett. (Engl. Transl.) 107 (2018) 186–191.
23. A.V. Subbotin, A.N. Semenov, Micro-cones on a liquid interface in high electric field: ionization effects, Phys. Fluids 30 (2018), 022108.
24. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. // Наука, М. (1986).

25. R.S. Sigmond, Simple approximate treatment of unipolar space-charge-dominated coronas: the Warburg law and the saturation current, *J. Appl. Phys.* 53 (1982) 891–898.
26. D.A. Saville, Electrohydrodynamics: the Taylor-Melcher leaky dielectric model, *Annu. Rev. Fluid Mech.* 29 (1997) 27–64.