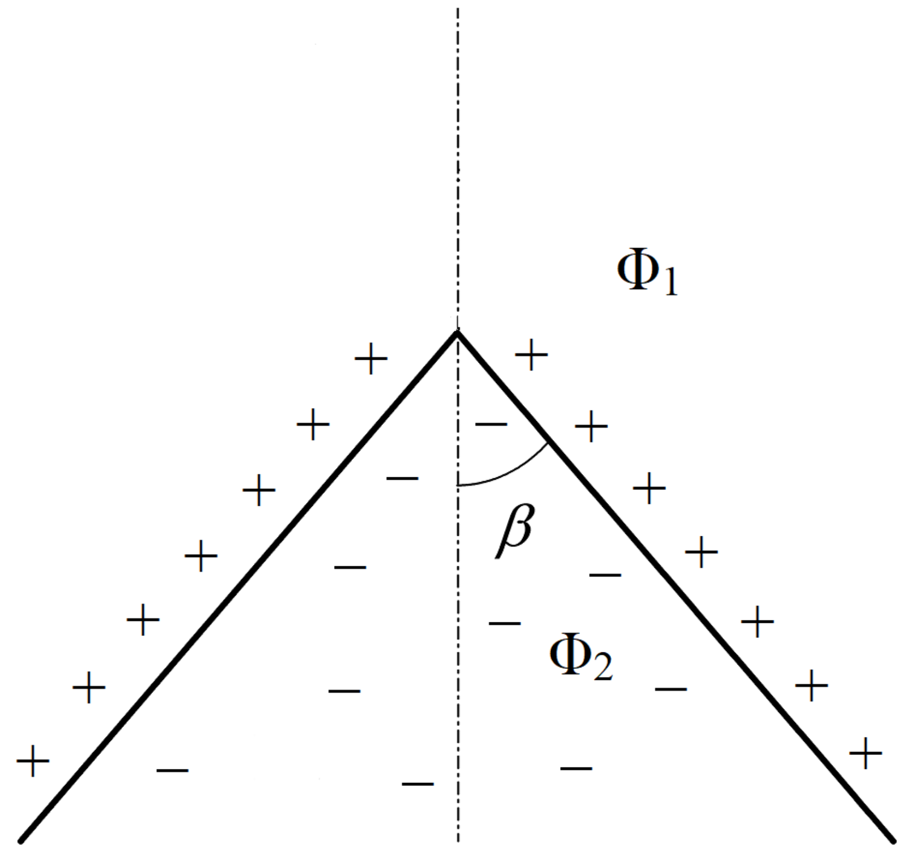
Стационарные конические образования на поверхности жидкости с учетом объемного заряда и поверхностного тока

Беляев М. А., аспирант 2 года обучения,
лаборатория нелинейной динамики

- Конические структуры на поверхности жидкости возникают в результате развития ЭГД неустойчивости.
- Тейлор (1964) – угол полураствора конуса равен 49.3°.
- В случае диэлектрика существуют только при $\varepsilon>17.6$ при различных углах (Ramos, Castellanos, 1994).
- Изучалось влияние объемного заряда на угол конуса на проводящей жидкости (De La Mora, 1994)
- Также рассматривался конус с учетом тока на поверхности и процессов диссоциации на вершине (Субботин, Семенов, 2014, 2017)
- В данной работе рассматривается:

    1. Конус с током положительных ионов на поверхности и током отрицательных ионов внутри.
    2. Конус с током положительных ионов на поверхности и учетом объемного заряда частиц, эмитируемых с вершины конуса.



- Далее будем рассматривать задачу в сферической системе координат с началом в вершине конуса (R – расстояние от вершины, θ – полярный угол), поле направлено вверх.

- Ур-е Лапласа вне конуса

$$\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial R^2}+\frac{2}{R}\frac{\partial\Phi_1}{\partial R}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial\theta^2}+\frac{ctg\theta}{R^2}\frac{\partial\Phi_1}{\partial\theta}=0$$

- Ур-е Пуассона внутри

$$\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial R^2}+\frac{2}{R}\frac{\partial\Phi_2}{\partial R}+\frac{1}{R^2}\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial\theta^2}+\frac{ctg\theta}{R^2}\frac{\partial\Phi_2}{\partial\theta}=-\frac{\rho}{\varepsilon_0\varepsilon}$$

- Ур-я непрерывности

$$\rho\left(\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial R^2}+\frac{2}{R}\frac{\partial\Phi_2}{\partial R}\right)+\frac{\partial\rho}{\partial R}\frac{\partial\Phi_2}{\partial R}=0$$

$$\sigma\left(\frac{\partial^2\Phi_2}{\partial R^2}+\frac{1}{R}\frac{\partial\Phi_2}{\partial R}\right)+\frac{\partial\sigma}{\partial R}\frac{\partial\Phi_2}{\partial R}=0$$

- Граничные условия

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial R} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial R}, \qquad \frac{1}{R}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} - \varepsilon \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta}\right) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \qquad \theta = \pi - \beta$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta} = 0 \qquad \theta = 0$$

Также отметим, что при $\theta = \pi - \beta$ $\quad \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} = 0$ (*)

- Условие равновесия свободной поверхности

$$p_E = p_S, \qquad p_E = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial \theta}\right)^2 + (\varepsilon - 1)\left(\frac{\partial \Phi_1}{\partial R}\right)^2\right)_{\theta = \pi - \beta}, \qquad p_S = \frac{\alpha}{R}\cot\beta$$

- Из него получаются следующие скейлинги

$$p_E \sim R^{-1}, \quad \Phi \sim R^{1/2}, \quad \rho \sim R^{-3/2}, \quad \sigma \sim R^{-1/2}$$

- (*) – Субботин, Семенов, 2017

- За счет исключения переменной R возможна редукция исходных уравнений к уравнениям на угловое распределение, что позволяет построить решения

$$\Phi_1 = CP_{1/2}(\cos\theta)R^{1/2}, \qquad \Phi_2 = AR^{1/2},$$

$$\rho = BR^{-3/2}, \qquad \sigma = DR^{-1/2}$$

где A, B, C, D постоянные, связанные некоторыми соотношениями

$$C = -(-2\alpha\mathrm{ctg}\Theta)^{1/2}\left[\varepsilon_0\sin^2\Theta\, {P'}^{2}_{1/2}(\cos\Theta) + \varepsilon_0(\varepsilon-1)P^2_{1/2}(\cos\Theta)/4\right]^{-1/2},$$

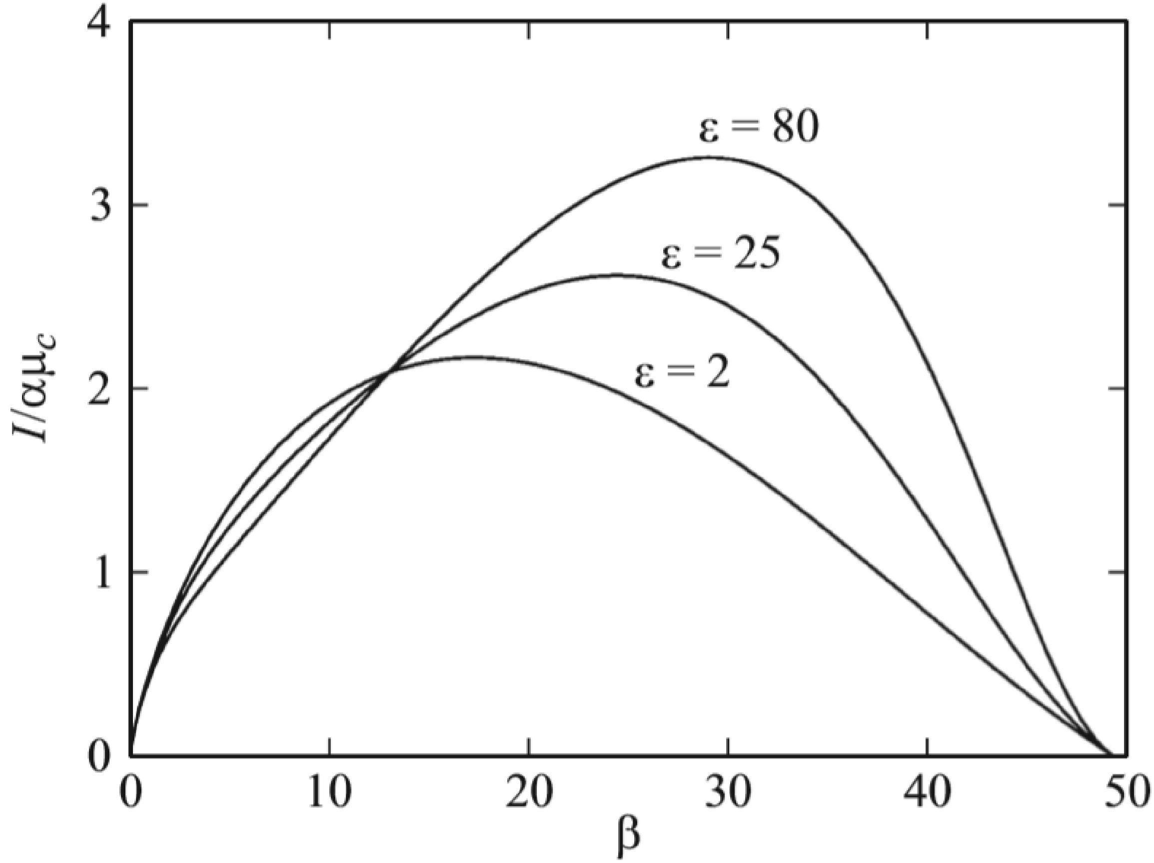
$$A = CP_{1/2}(\cos\Theta), \qquad B = -3\varepsilon_0\varepsilon CP_{1/2}(\cos\Theta)/4, \qquad D = -\varepsilon_0 CP'_{1/2}(\cos\Theta)\sin\Theta$$

здесь $\mathrm{P}_{1/2}$ – функция Лежандра порядка ½, $\Theta = \pi - \beta$

Полученные решения соответствуют ограничению тока объемным зарядом.

- Можно найти величину тока через конус

$$I = I_k + I_a, \qquad I_k = \pi\mu_k DA\sin\beta, \qquad I_a = -\pi\mu_a AB(1-\cos\beta)$$



- Присутствует ток на поверхности конуса и эмиссия частиц с его вершины

- Граничные условия

$$\frac{\partial \Phi_2}{\partial R} = \frac{\partial \Phi_3}{\partial R}, \quad \frac{1}{R}\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} - \varepsilon \frac{\partial \Phi_3}{\partial \theta}\right) = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}, \quad \theta = \pi - \beta$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial R} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial R}, \qquad \frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta} = 0, \qquad \theta = \gamma$$

$$\frac{\partial \Phi_3}{\partial \theta} = 0, \qquad \theta = \pi$$

- Баланс сил

$$p_S = p_E \qquad\qquad p_S = \alpha R^{-1} \cot\beta,$$

$$p_E = \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{1}{R^2}\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \theta}\right)^2 - \frac{\varepsilon}{R^2}\left(\frac{\partial \Phi_3}{\partial \theta}\right)^2 + (\varepsilon - 1)\left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial R}\right)^2 \right)\Big|_{\theta=\pi-\beta}$$

- Равенство токов

$$I_s = I_v$$

$$I_s = 2\pi R \mu_s \sin\beta\, \sigma \frac{\partial \Phi_3}{\partial R}\Big|_{\theta=\pi-\beta}$$

$$I_v = -2\pi R^2 \mu_v (1 - \cos\gamma) \rho \frac{\partial \Phi_1}{\partial R}$$

- Точные решения

$$\Phi_1 = AR^{1/2}, \quad \Phi_2 = C_1 P_{1/2}(\cos\theta) R^{1/2} + C_2 P_{1/2}(-\cos\theta) R^{1/2},$$

$$\Phi_3 = C_3 P_{1/2}(-\cos\theta) R^{1/2}, \quad \rho = BR^{-3/2}, \quad \sigma = DR^{-1/2}$$

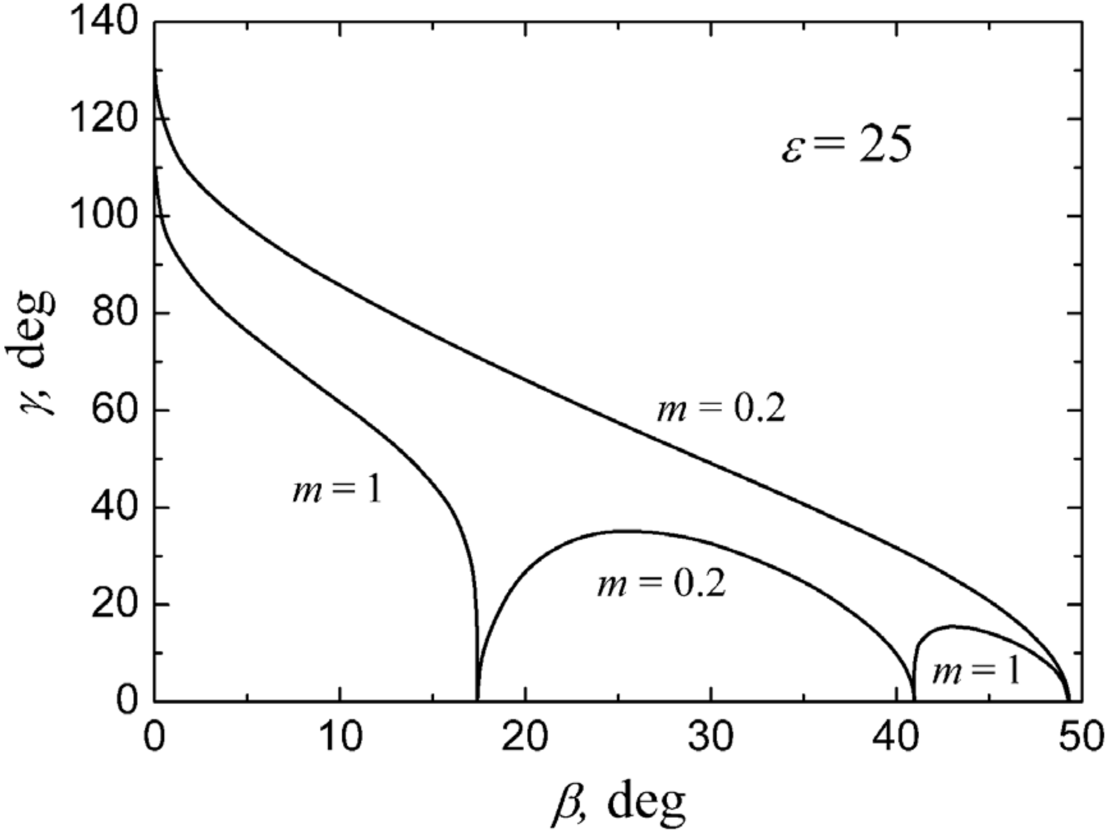
- Возможно построить зависимости между углами

$$\frac{\big(1 - \varepsilon - G(\gamma)G(\beta) - \varepsilon F(\beta)G(\gamma)\big)\big(F(\beta)G(\gamma) + 1\big)}{\big(G(\gamma) + F(\gamma)\big)^2} =$$

$$= \frac{3m(1 - \cos\gamma) P_{1/2}^2(\cos\gamma)}{4\sin^2\beta\, P_{1/2}(\cos\beta) P'_{1/2}(\cos\beta)},$$

где $$F(x) = \frac{P_{1/2}(-\cos x)}{P_{1/2}(\cos x)}, \qquad G(x) = \frac{P'_{1/2}(-\cos x)}{P'_{1/2}(\cos x)}$$

- Зависимость между углом раствора и углом разлета частиц при различных значениях диэлектрической проницаемости и различных отношениях подвижностей $m \equiv \mu_v/\mu_s$



Выводы

- Для обоих случаев удается построить точные решения.
- В случае конуса с током в объеме удается построить зависимость тока от угла при различных значениях проницаемости, соответствующую режиму ограничения тока объемным зарядом. Полученная зависимость отличается от полученной другими авторами (Субботин, Семенов)
- Для случая конуса с влиянием объемного заряда эмитированных частиц удается построить зависимость угла разлета частиц от угла раствора конуса. Данная зависимость имеет две ветви, соответствующие различным случаям, исследованным в более ранних работах (Ramos, Castellanos), (De La Mora).