

Российская академия наук
Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт электрофизики
Уральского отделения Российской академии наук
(ИЭФ УрО РАН)

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«МОЩНАЯ ИМПУЛЬСНАЯ ЭНЕРГЕТИКА»
Б1.В.ДВ.2-2

Специальность 03.06.01 – «Физика и астрономия»

*Отдельные вопросы высоковольтной импульсной
электрофизики*

Материалы разработал:

д.т.н., член-корр. РАН

Яландин М.И.

Содержание:

	Стр.
1. <u>Введение</u>	4
2. <u>Законы электрических цепей.</u> Закон Ома для участка цепи. Потери энергии в проводнике. Сторонние э.д.с. Источники тока и источники напряжения. Законы Кирхгофа для цепи постоянного тока. Квазистационарный ток.	9
3. <u>Анализ нестационарных процессов в электрических цепях.</u> Классический метод или метод характеристического уравнения. Операторный метод или метод преобразования Лапласа. Метод интеграла Дюамеля.	20
4. <u>Накопители энергии в импульсной технике.</u> Механические накопители энергии. Индуктивные накопители энергии. Емкостные накопители энергии. Химические накопители энергии.	29
5. <u>Зарядка емкостных и индуктивных накопителей энергии.</u> Резистивная зарядка емкостных накопителей. Резистивная зарядка индуктивных накопителей. Индуктивная зарядка емкостных накопителей. Индуктивная зарядка емкостных накопителей с учетом активных потерь.	38
6. <u>Вывод энергии из емкостных и индуктивных накопителей.</u> Разряд емкостного накопителя на активную нагрузку. Вывод энергии из емкостного накопителя в активную нагрузку с учетом индуктивности разрядного контура. Разряд емкостного накопителя на емкостную нагрузку. Вывод энергии из индуктивного накопителя в активную нагрузку.	50
7. <u>Методы преобразования напряжения.</u> Генераторы с умножением напряжения: генератор Маркса; генератор Фитча. Трансформаторные системы: импульсный трансформатор; трансформатор Тесла; линейный трансформатор.	63
8. <u>Волны в передающих линиях.</u> Волновое уравнение. Канализация волн. Телеграфное уравнение. Коаксиальная линия. Поток энергии в передающих линиях. Коэффициенты отражения и прохождения. Неоднородные линии. Передающая линия с дискретной неоднородностью.	77
9. <u>Однородные формирующие линии.</u> Одиночная формирующая линия. Оптимальные параметры коаксиальной формирующей линии. Двойная формирующая линия.	99
10. <u>Преобразователи импульсов в системах с длинными линиями.</u> Пассивный биполярный преобразователь. Активный биполярный преобразователь. Компрессия импульсов в режиме бегущей волны.	112
11. <u>Коммутация накопителей энергии.</u> Классификация коммутаторов. Особенности использования диэлектриков. Газовые разрядники.	129
12. <u>Рекомендуемая литература</u>	138

Предисловие автора

Содержание относится к описанию ряда базовых законов, общих принципов построения и анализа режимов работы импульсных экспериментальных систем. Основное внимание будет уделено вопросам, поддающимся под ряд научных специальностей по классификатору ВАК РФ:

01.04.03 – Радиофизика

01.04.04 – Физическая электроника

01.04.08 – Физика плазмы

01.04.13 – Электрофизика, электрофизические установки

01.04.20 – Физика пучков заряженных частиц и ускорительная техника.

Подавляющая часть материала базируется на классических выкладках из теории электрических цепей, электродинамики и других смежных областей. В своё время, вместе с моим другом, академиком РАН С.Д. Коровиным, при встречах и обмене лекционными материалами мы часто обдумывали структуру подобного курса лекций и дискутировали о методах изложения простых, казалось бы вопросов. Цель заключалась в том, чтобы дать представление о сложных системах на понятном для читателя уровне. При этом, ориентируясь на студенческую и аспирантскую аудиторию, всегда хотелось видеть наряду с методическим аспектом лекций практический. Практическая ценность лекций – это те формулы, выводы и рекомендации, о которых читатель вспоминает много позже сданных экзаменов, и прибегает к ним для повседневных справок.

Судьба не позволила С.Д. Коровину продолжить интересную работу, которую он начал несколько раньше меня. Я благодарен ему за советы и проделанное совместно, что не забывается. Переработанный вариант лекций С. Д. Коровина был в дальнейшем также издан его коллегами и учениками, работающими в ИСЭ СО РАН.

М.И. Яландин

1. Введение.

Цель настоящего спецкурса состоит в формировании общего представления о подходах и основах интенсивно развивавшегося во второй половине прошедшего века направления экспериментальной технической физики - **импульсной техники и энергетики**. Эта область исследований и разработок в значительной степени определяет прогресс **физики высоких плотностей энергии***, которая, в свою очередь, всегда была тесно сопряжена с прикладными работами оборонного характера, а также с задачами термоядерной энергетики, развитием ускорительной техники, радиофизикой. Не смотря на известные трудности, испытываемые национальной наукой в последние 20 лет, это направление осталось «на плаву» и, наряду с вновь возникшими модными отраслями физических знаний (физическая информатика, нанотехнологии и др.), как и ранее является продуктивным и конкурентоспособным в мировом масштабе. Последний период времени характеризуется интенсивным поиском новых областей применения импульсных энергетических устройств, связанных с тенденциями развития общественных потребностей (экология, медицина, безопасность), а также для интердисциплинарных исследований.

Говоря о высоких плотностях энергии и о больших мощностях при её выделении в нагрузку (объекте исследования), уместно пояснить на ряде очевидных примеров, почему же речь идёт, прежде всего, об импульсных системах.

Пример 1.

Проектная мощность Братской ГЭС, работающей, как известно, в непрерывном режиме, составляет приблизительно 6×10^9 Вт.

Наибольшая мощность, развитая при выделении энергии созданным человеком источником (термоядерный заряд в 50 мегатонн) достигла 5×10^{24}

* Не следует идентифицировать с «**физикой высоких энергий**»

Вт. Эта мощность составила приблизительно 1% мощности излучения Солнца, но, в отличие от последнего, «работающего» в непрерывном режиме, генерировалась в течение $\sim 10^{-7}$ с.

Пример 2.

Для нагрева 3 литров воды до температуры кипения требуется ~ 1 МДж энергии. Такая же энергия выделяется при взрыве тротила ручной гранаты, приблизительно за время пробега детонационной волны, которое оказывается в микросекундном ($\sim 10^{-5}$ с) диапазоне.

Пример 3.

Длина гирлянды стеклянных или керамических изоляторов высоковольтной линии электропередач на напряжение 100 кВ и выше – более метра. С другой стороны, хорошо известно, что короткий импульс напряжения амплитудой в десятки киловольт в системе зажигания автомобиля передается по проводу с толщиной изоляции в единицы миллиметров или формируется в компактной зажигалке с пьезоэлектрическим элементом.

Таким образом, импульсные системы при идентичном энерговыделении (W) отличаются наиболее высокой мощностью (P), обратно пропорциональной времени выделения энергии в нагрузку (t), что совершенно понятно из формулы $W = P \cdot t$. При этом, импульсные устройства могут быть компактны (см. Пример 3) и производят на объект исследования воздействие (см. Пример 2), характер которого может принципиально отличаться от воздействия при медленном энерговыделении от внешнего источника. Заметим, что выше речь велась об источниках энергии различной природы: электрической, химической, ядерной.

В таблице приведены характерные показатели некоторых импульсных источников энергии.

Таблица. Источники энергии высокой плотности*

Первичный источник	Конечная форма	Плотность энергии, МДж/см ³	Полная энергия, МДж
Химические взрывчатые вещества	▪ Прямое энерговыделение	8×10^{-3}	100 (10 кг TNT)
	▪ Металлическая струя (Cu)	1	10^{-3}
	▪ Магнитное поле 25 МЭ	2,5	1
Конденсатор (батареи)	▪ Прямое энерговыделение	10^{-8}	5 (и более)
	▪ Электровзрыв проводника	0,05	10^{-3}
Термоядерная реакция	▪ Прямое энерговыделение	10^4	10^{11}



Рис.1.1. Параметры, характеризующие импульсную систему, включающую различные варианты нагрузок в виде источников пучков частиц и электромагнитного излучения.

* Г.Кнопфель, Сверхсильные импульсные магнитные поля. М: Мир, 1972

Из приведённой на рис.1.1 диаграммы понятно, что импульсная энергетика имеет основной целью освоение высоких уровней мощности источников напряжения, пучков частиц и электромагнитного излучения, что при прочих условиях достигается наращиванием энергии, передаваемой импульсным генератором в соответствующую нагрузку. При фиксированном энергозапасе повышение мощности возможно в случае сокращения времени выделения (компрессии) энергии, то есть – при уменьшении длительности импульса. То есть, общий принцип импульсных энергетических устройств принципиально не меняется: это медленное накопление энергии от внешнего источника, а затем, - быстрое выделение в нагрузку.

Задачи, которые стимулировали создание мощных импульсных генераторов, исторически носили как исследовательский, так и практический характер. Это экстремальные испытания электрической прочности изоляции традиционных энергетических систем (грозозащита), импульсная рентгенография быстропротекающих процессов (взрыв, баллистика), неразрушающая рентгеновская дефектоскопия, физика электровзрыва проводников и детонационных процессов, нагрев термоядерной плазмы (инерциальный синтез), радиолокация и связь большой дальности, техника ядерно-физического эксперимента и многое другое. Исследования и разработки с учетом потребностей этих направлений привели в 1970-х к уверенному освоению диапазона длительностей 10^{-8} - 10^{-9} с. Затем последовало создание высоковольтных наносекундных генераторов с энергозапасом в десятки мегаджоулей, напряжением до 10^7 В, токами более 10^6 А и импульсной мощностью более 10^{12} Вт. В дальнейшем всё большее внимание стали привлекать компактные устройства, обеспечивающие вывод энергии за времена 10^{-9} -

10^{-10} с. Так сформировалось новое физико-техническое направление - мощная наносекундная и пикосекундная энергетика.



Рис.1.2. Блок-схема высоковольтного генератора, работающего по принципу последовательной компрессии электрической энергии.

Показанная на рис.1.2 схема представляет сложную электрическую цепь с нелинейными (в общем случае) элементами. Прежде, чем анализировать особенности построения и физические принципы функционирования отдельных блоков, имеет смысл напомнить основные законы и методы анализа таких цепей.

2. Законы электрических цепей.

2.1. Закон Ома для участка цепи

Если в проводящей среде имеется электрическое поле, то оно вызывает ток J , причем величина плотности тока \vec{j} и поля \vec{E} связаны соотношением

$$\vec{j} = \sigma \vec{E} \quad (2.1)$$

которое носит название закона Ома. Величина σ называется проводимостью. Выберем в качестве проводящей среды проводник, поперечные размеры которого малы по сравнению длиной. Электрическое поле внутри проводника направлено вдоль его оси ($d\vec{l}$). Из уравнения непрерывности следует, что полный ток через сечения проводника S не изменяется, поэтому

$$j = \frac{J}{S}. \quad (2.2)$$

Проинтегрируем (2.1) вдоль проводника от сечения 1 до сечения 2. Тогда

$$\int_1^2 \frac{\vec{j} d\vec{l}}{\sigma} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} \quad (2.3)$$

Поскольку $\vec{j} d\vec{l} = j dl$, то (2.3) с учетом (2.2) можно записать, как

$$J \int_1^2 \frac{dl}{S\sigma} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} \quad (2.4)$$

где $\int_1^2 \frac{dl}{S\sigma} = R_{1,2}$ есть сопротивление проводника на участке (1-2).

Ввиду того, что рассматриваются постоянные во времени поля, электрическое поле в проводнике является потенциальным, или

$$\vec{E} = -\nabla\varphi \quad (2.5)$$

Тогда интеграл в правой части (2.4) можно записать в виде

$$\varepsilon_{1,2} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{l} = \varphi_1 - \varphi_2.$$

Величина $\varepsilon_{1,2}$ называется напряжением (или разностью потенциалов) между сечениями 1-2. Таким образом, закон Ома для участка цепи 1-2 принимает вид

$$\boxed{JR_{1,2} = \varepsilon_{1,2}}. \quad (2.6)$$

2.2. Потери энергии в проводнике

При протекании тока через проводник с конечной проводимостью происходит выделение энергии. Закон сохранения энергии для выбранного участка цепи в дифференциальной форме имеет вид:

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} = -\text{div}\vec{S} - q \quad (2.7)$$

Здесь ω - плотность электромагнитной энергии в проводнике, \vec{S} -плотность потока энергии, q -мощность потерь в единице объема. Проинтегрируем (2.7) по объему V выбранного участка проводника:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\int_V \vec{S} d\vec{V} - Q. \quad (2.8)$$

Здесь Q - потери энергии в проводнике в единицу времени. Для стационарных процессов $\partial/\partial t = 0$, поэтому

$$-\oint_V \vec{S} d\vec{V} = Q. \quad (2.9)$$

Таким образом, потери энергии в проводнике полностью компенсируются потоком энергии, поступающей из внешнего пространства. Очевидно, что для этого должны существовать сторонние источники, которые обеспечивают стационарность процесса.

Рассмотрим, например, цилиндрический проводник. Вектор Пойнтинга для такого проводника направлен по радиусу к центру проводника

$$S_r = \frac{c}{4\pi} E_l H_\varphi. \quad (2.10)$$

Здесь E_l - электрическое поле в проводнике. Ввиду непрерывности E_l при переходе через границу раздела двух сред (в данном случае проводник-непроводник) такое же значение тангенциальная составляющая электрического поля имеет и на поверхности проводника. В (2.10) H_φ - магнитное поле тока, протекающего по проводнику. В частности, для цилиндрического проводника $H_\varphi = 2J / cr$.

Полный поток энергии через поверхность проводника

$$-\oint_V \vec{S} d\vec{V} = \iint_V S_r r d\varphi dl = \frac{c}{4\pi} \iint_V E_l H_\varphi r d\varphi dl = J(\varphi_1 - \varphi_2). \quad (2.11)$$

Здесь учтено, что поток энергии направлен внутрь проводника в противоположную сторону по отношению к нормали к поверхности. Кроме того,

$$\int_1^2 E_l dl = -\int_1^2 \nabla_l \varphi dl = \varphi_1 - \varphi_2. \quad (2.12)$$

Соотношение (2.11) показывает, что поток энергии, поступающий в проводник из внешнего пространства, равен работе сил

электростатического поля по перемещению заряда $dq = Jdt$ на участке 1-2 в единицу времени.

Используя закон Ома, мощность потерь энергии в проводнике, таким образом, можно записать в виде

$$\boxed{Q = J^2 R}. \quad (2.13)$$

Полученное соотношение носит название закона Джоуля-Ленца.

2.3. Сторонние э.д.с.

Существование постоянного тока в проводнике возможно лишь при наличии сторонних неэлектростатических сил. В противном случае токи в проводниках всегда равны нулю. Действительно, если в некоторой системе проводников поля являются только электростатическими, то под действием кулоновских сил положительные заряды будут перемещаться из областей с большим потенциалом в область с меньшим потенциалом, отрицательные заряды будут перемещаться в обратном направлении. Это приведет к выравниванию потенциалов и прекращению движения зарядов. Таким образом, электрический ток будет стремиться к нулю. Поэтому для существования постоянного тока в проводнике необходимы сторонние по отношению к электростатическому полю силы. Для создания постоянного тока обычно используются гальванические элементы, термоэлементы, динамо-машины постоянного тока и др. Установим связь между током в проводнике и приложенной к нему сторонней силой. Пусть суммарное поле в проводнике есть

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{E}^{cm}, \quad (2.14)$$

где \vec{E} – электростатическое поле в проводнике, \vec{E}^{cm} – сторонние поля, которые могут существовать хотя бы на отдельных участках цепи. В

дифференциальной форме связь между плотностью тока и полем в проводнике будет теперь задаваться обобщенным законом Ома

$$\vec{j} = \sigma(\vec{E} + \vec{E}^{cm}). \quad (2.15)$$

Проинтегрируем (2.15) по длине проводника от сечения (1) до сечения (2). Тогда закон Ома принимает вид:

$$JR_{1,2} = \varphi_1 - \varphi_2 + E_{2,1}^{cm}, \quad (2.16)$$

где интеграл $E_{1,2}^{cm} = \int_1^2 \vec{E}^{cm} d\vec{l}$ называется электродвижущей силой (э.д.с.),

приложенной к данному участку.

Если контур тока является замкнутым, то $\oint \vec{E} d\vec{l} = 0$, а закон Ома принимает вид:

$$\boxed{JR = \oint \vec{E}^{cm} d\vec{l} = E^{cm}}. \quad (2.17)$$

В частности, для контура, в котором отсутствуют сторонние э.д.с., ток равен нулю.

2.4. Источники тока и источники напряжения.

Пусть замкнутый контур содержит источник э.д.с. с внутренним сопротивлением R_{in} и нагрузку R_L . В данном случае R_{in} это характеристика источника э.д.с. Выберем направление тока, как показано на рисунке 2.1. (В технике за

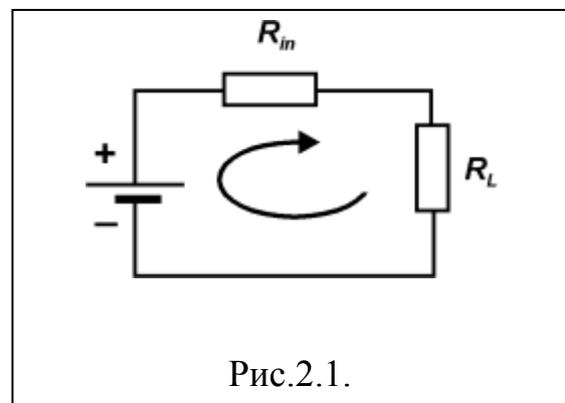


Рис.2.1.

положительное направление тока принимается направление от «+» к «-»).

Тогда для данного контура можно записать:

$$J(R_{in} + R_L) = E^{cm}. \quad (2.18)$$

В (2.18) перед E_{cm} выбран знак «+», в соответствии с физическим смыслом электродвижущей силы. Произведение eE_{cm} есть работа, необходимая для перемещения заряда вдоль замкнутого контура. Направления токов в контурах задаются источниками э.д.с. Из (2.18) следует, что

$$J = \frac{E^{cm}}{R_{in} + R_L}, \quad (2.19)$$

где величина тока положительная.

Применим уравнение (2.16) к участку цепи, содержащему сопротивление нагрузки, тогда падение напряжения на нагрузке

$$JR_L = \varphi_1 - \varphi_2 \quad (2.20)$$

И, таким образом, с учетом (2.19),

$$\varphi_1 - \varphi_2 = E^{cm} \frac{R_L}{R_{in} + R_L}. \quad (2.21)$$

В случае, когда $R_L \gg R_i$, падение напряжения на нагрузке

$$\varphi_1 - \varphi_2 \approx E^{cm}. \quad (2.22)$$

Следовательно, падение напряжения на нагрузке равно э.д.с., когда сопротивление нагрузки велико по сравнению с внутренним сопротивлением стороннего источника. В этом случае источник э.д.с. с данным внутренним сопротивлением для данной нагрузки называется **источником напряжения**.

В обратном предельном случае, $R_L \ll R_{in}$, ток через нагрузку не зависит от величины сопротивления нагрузки:

$$J \approx \frac{E^{cm}}{R_L}. \quad (2.23)$$

Такой источник э.д.с. называется источником тока для данной нагрузки.

2.5. Законы Кирхгофа для цепи постоянного тока.

Рассмотрим теперь электрическую цепь, содержащую несколько контуров, т.е. цепь, в которой имеются *точки ветвления* протекающего тока. Уравнение непрерывности в дифференциальной форме имеет вид:

$$- \operatorname{div} \vec{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (2.24)$$

Интегрируя это уравнение по объему для случая, когда $\partial \rho / \partial t = 0$, нетрудно получить, что

$$\oint \vec{j} d\vec{S} = 0. \quad (2.25)$$

Выражение (2.25) означает, что полный ток через замкнутую поверхность равен нулю или, что то же самое, отсутствует накопление или убыль зарядов в объеме, ограниченном замкнутой поверхностью. Для рассматриваемой системы проводников это эквивалентно тому, что

$$\boxed{\sum_i J_i = 0}. \quad (2.26)$$

Последнее выражение носит название первого закона Кирхгофа для точек ветвления токов и означает, что алгебраическая сумма токов в точке ветвления равна нулю.

Применим закон Ома для произвольного замкнутого контура электрической цепи, состоящей из произвольного количества контуров. Пусть в выбранном контуре имеется N узлов. Тогда

$$\sum_{i=1}^N J_i R_{i,i-1} = \sum_{i=1}^N (\varphi_{i-1} - \varphi_i) + \sum_{i=1}^N E_{i,i-1}^{cm}. \quad (2.27)$$

Поскольку для замкнутых контуров первая сумма в правой части равна нулю, то (2.27) можно записать в виде

$$\boxed{\sum_{i=1}^N J_i R_{i,i-1} = \sum_{i=1}^N E_{i,i-1}^{cm}}. \quad (2.28)$$

В такой форме последнее выражение носит название **второго закона Кирхгофа** для постоянных токов.

2.6. Квазистационарный ток

Квазистационарным током называется ток, изменение которого происходит за время $T \gg l/c$, где l – характерный размер системы, c – скорость света. Это ограничение позволяет **пренебречь запаздыванием** распространения электромагнитных колебаний в пространстве для данной системы токов и **пренебречь потерями энергии на излучение**, а также считать, что зависимость тока от времени является **одинаковой** для любого сечения контура. Отсюда следует, что в данном случае первый закон Кирхгофа выполняется и для квазистационарных токов.

Тем не менее, отличия от постоянного тока все-таки существуют даже при выполнении отмеченного выше условия. Если для токов постоянных в качестве сторонних можно было рассматривать только источники неэлектрического происхождения, то для токов переменных (изменяющихся во времени) в качестве таких источников необходимо учитывать э.д.с., возникающую при изменении потока магнитного поля через контур (как за счет изменения токов, так и за счет деформации самого контура). Поэтому, выделяя **индукционную э.д.с.** из сторонних э.д.с., закон Ома для переменных токов применительно к замкнутому контуру можно записать в виде

$$JR = E^{cm} - \frac{d\phi}{dt}. \quad (2.29)$$

В (2.29) $\phi = \phi_{1,1} + \sum_i \phi_{1,i}$, где $\phi_{1,1}$ – магнитный поток через контур, который создан самим рассматриваемым контуром, а $\phi_{1,i}$ – магнитный поток через рассматриваемый контур, созданный контуром (i).

Связь между магнитным потоком и током, который создает данный магнитный поток в рассматриваемом контуре, в системе СИ дается соотношением:

$$\phi = LJ + \sum_i L_{1,i} J_i, \quad (2.30)$$

где L – индуктивность рассматриваемого контура (или коэффициент самоиндукции), $L_{1,i}$ – коэффициент взаимной индукции контуров (1) и (i).

В частности, если коэффициенты взаимной индукции равны нулю, то для замкнутого контура справедливо уравнение

$$JR + L \frac{dJ}{dt} = E^{cm}. \quad (2.31)$$

Для системы, состоящей из двух контуров, обладающих магнитной связью друг с другом, справедлива система уравнений

$$\begin{aligned} J_1 R_1 + L_1 \frac{dJ_1}{dt} &= -L_{1,2} \frac{dJ_2}{dt} + E_1^{cm} \\ J_2 R_2 + L_2 \frac{dJ_2}{dt} &= -L_{2,1} \frac{dJ_1}{dt} + E_2^{cm} \end{aligned}. \quad (2.32)$$

Очевидно, что $L_{1,2} = L_{2,1}$.

Другой особенностью контуров с переменным током является возможность существования **разрывов в цепи**. К таковым можно отнести контуры, которые содержат конденсаторы. Если ток не зависит от времени, то в контурах, содержащих конденсаторы, он может быть только нулевым. Для случая переменных токов это уже не так. Рассмотрим

контур, содержащий кроме сопротивления и индуктивности еще и конденсатор. Пусть токи в цепи удовлетворяют условию квазистационарности. Тогда энергия, накопленная в контуре как в замкнутой системе, есть

$$W = \frac{1}{2} \frac{q_1^2}{C} + L \frac{J^2}{2}, \quad (2.33)$$

где $q_1 = -q_2$ – заряд на обкладках конденсатора. Изменение энергии в контуре в данном случае может быть связано только с ее рассеянием в сопротивлении (предполагается, что поток энергии в контур и из контура равен нулю). Поэтому

$$J^2 R = -\frac{dW}{dt}, \quad (2.34)$$

или

$$J^2 R = -\left(\frac{q_1}{C} \frac{dq_1}{dt} + LJ \frac{dJ}{dt} \right). \quad (2.35)$$

Согласно уравнению непрерывности $J = dq_1 / dt$, а $q_1 = \int J dt$. Тогда из (2.35) получаем

$$\frac{1}{C} \int J dt + JR + L \frac{dJ}{dt} = 0. \quad (2.36)$$

Если в контуре есть сторонние источники энергии, то

$$J^2 R = -\frac{dW}{dt} + \frac{dW_{cm}}{dt}. \quad (2.37)$$

Второй член в правой части (2.37) есть не что иное, как мощность стороннего источника, которая может быть представлена в виде

$$\frac{dW_{cm}}{dt} = JE_{cm}. \quad (2.38)$$

Тогда вместо (2.36) получаем

$$\boxed{\frac{1}{C} \int J dt + JR + L \frac{dJ}{dt} = E_{cm}}. \quad (2.39)$$

Последнее уравнение и есть **второй закон Кирхгофа для квазистационарных токов.**

3. Анализ нестационарных процессов в электрических цепях.

3.1. Классический метод или метод характеристического уравнения

Пусть имеется однородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами r -ого порядка:

$$\Phi[J] \equiv a_0 \frac{d^r J}{dt^r} + a_1 \frac{d^{r-1} J}{dt^{r-1}} + \dots + a_r J = 0. \quad (3.1)$$

Общее решение такого уравнения можно искать в виде:

$$J(t) = \sum_{j=1}^r J_j e^{\lambda_j t}. \quad (3.2)$$

Подстановка (2) в (1), сводит дифференциальное уравнение (1) к алгебраическому уравнению $\sum_{j=1}^r (a_0 \lambda_j^r + a_1 \lambda_j^{r-1} + \dots + a_{r-1} \lambda_j + a_r) J_j e^{\lambda_j t} = 0$,

которое имеет нетривиальное решение, если для всех λ_j

$$a_0 \lambda^r + a_1 \lambda^{r-1} + \dots + a_{r-1} \lambda + a_r = 0, \quad (3.3)$$

или λ_j являются корнями характеристического уравнения (3.3).

Если некоторый корень λ_j характеристического уравнения имеет кратность m_j , то соответствующие члены в (3.2) имеют вид

$$(J_j + J_{j,1} t + \dots + J_{j,m_j-1} t^{m_j-1}) e^{\lambda_j t}.$$

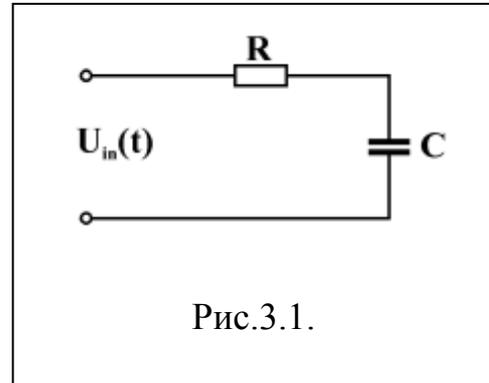
Различные члены в (3.2) называются собственными колебаниями. Все r постоянных определяются по начальным и краевым условиям. Если исходное уравнение является неоднородным,

$$\Phi[J] \equiv a_0 \frac{d^r J}{dt^r} + a_1 \frac{d^{r-1} J}{dt^{r-1}} + \dots + a_r J = f(t), \quad (3.4)$$

то его общее решение есть сумма общего решения однородного уравнения (3.1) и какого-либо частного решения неоднородного уравнения (3.4). Общее решение неоднородного уравнения, в частности, может быть найдено методом вариации постоянных.

Рассмотрим, например, схему, на рис. 3.1. Второе уравнение Кирхгофа для этой схемы имеет вид:

$$\frac{1}{C} \int J dt + JR = U_{in}(t). \quad (3.5)$$



Пусть в начальный момент времени $U_C(0) = 0$. Если в качестве искомой функции выбрать ток, то, дифференцируя (3.5) и учитывая начальные условия, можно получить:

$$\begin{aligned} J + \frac{1}{RC} J &= \frac{1}{R} \dot{U}_{in}(t) \\ J(0) &= \frac{1}{R} U_{in}(0) \end{aligned} \quad (3.6)$$

Очевидно, что (3.5) можно решать и относительно функции $U_C = \frac{1}{C} \int J dt$.

Тогда (3.5) с учетом начальных условий можно представить в виде:

$$\begin{aligned} \dot{U}_C + \frac{1}{RC} U_C &= \frac{1}{RC} U_{in}(t) \\ U_C(0) &= 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Рассмотрим уравнение (3.6). Решение однородного уравнения есть

$$J(t) = J_0 e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (3.8)$$

Решение неоднородного уравнения будем искать **методом вариации постоянных**. Считая, что $J_0 = J_0(t)$ подставим (3.8) в (3.6), откуда

$$J_0(t) = J_0(0) + \frac{1}{R_0} \int_0^t \dot{U}_{in}(t') e^{-\frac{t-t'}{RC}} dt', \quad (3.9)$$

а искомое решение есть

$$J(t) = J_0(0) e^{-\frac{t}{RC}} + \frac{1}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \int_0^t \dot{U}_{in}(t') e^{\frac{t-t'}{RC}} dt'. \quad (3.10)$$

Пусть, например, $U_{in}(t)$ – **ступенчатая функция** с амплитудой U_0 , тогда

$$J(t) = J_0(0) e^{-\frac{t}{RC}} = \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}}. \quad (3.11)$$

Напряжение на конденсаторе $U_C(t) = U_{in} - J(t)R = U_0(1 - e^{-t/RC})$.

Если $U_{in}(t) = U_0 \alpha t$ – **линейно нарастающая функция**, то:

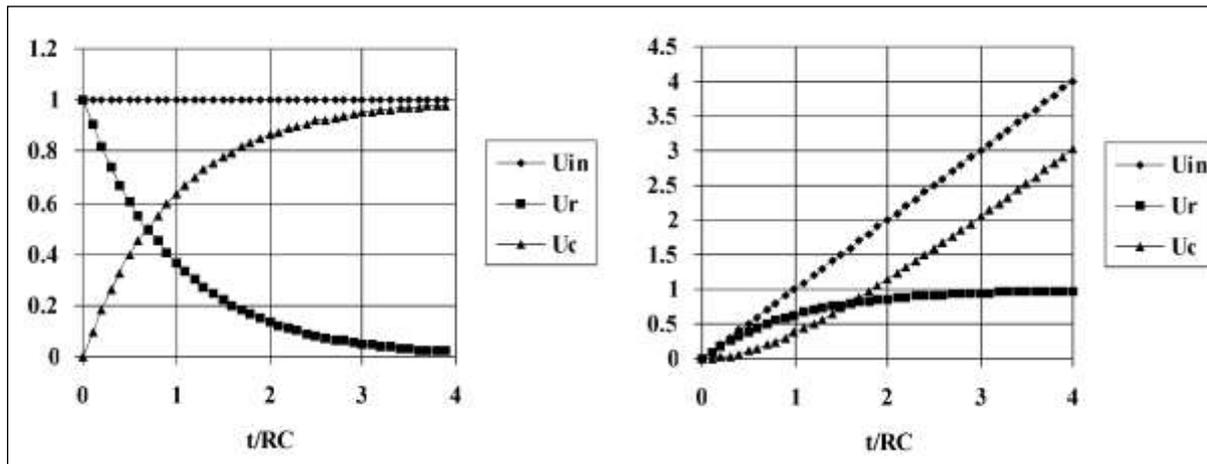
$$J(t) = \frac{U_0}{R} (\alpha RC) (1 - e^{-\frac{t}{RC}}); \quad U_C = U_0 (\alpha RC) \left(\frac{t}{RC} - 1 + e^{-t/RC} \right).$$

При $t \gg RC$ зарядка конденсатора будет линейно-нарастающей:
 $U_C \approx U_0 \alpha t$.

Зависимости $U_C(t)$ и $U_R(t)$ для двух рассмотренных случаев приведены на рисунке 3.2.

Примечание:

Режим зарядки на рис.3.2,а типичен для простейших схем зарядки конденсаторных накопителей энергии и интегрирующих RC-цепей. Видно, что за время $t \approx 3RC$ конденсатор будет заряжен до ~ 90 % от значения приложенного напряжения. Величина $\tau = RC$ называется постоянной R – C цепи.



а)

б)

Рис.3.2.

а) - ступенчатая функция

б) - линейно нарастающая функция

3.2. Операторный метод или метод преобразования Лапласа.

Для интегрирования (3.4) с начальными условиями $J(0+0)$, $J'(0+0)$, ..., $J^{(r-1)}(0+0)$ часто применяется преобразование Лапласа к обеим частям уравнения. Получающееся линейное алгебраическое уравнение легко разрешимо относительно изображения искомого решения. Искомое решение находится путем обращения преобразования Лапласа.

Преобразование Лапласа

$$F(p) = L[f(t)] = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \quad (3.12)$$

ставит в соответствие каждой однозначной функции (оригиналу) $f(t)$ (t – действительно), для которой интеграл (3.12) сходится, единственную функцию $F(p)$ (изображение) комплексной переменной $p = \sigma_0 + i\omega$.

Из определения преобразования Лапласа следует ряд простых свойств этого преобразования.

Линейность:

$$L[\alpha f_1(t) + \beta f_2(t)] = \alpha F_1(p) + \beta F_2(p).$$

Изменение масштаба:

$$L[f(\alpha t)] = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \quad \alpha > 0.$$

Дифференцирование:

$$L[f'(t)] = pF(p) - f(0+0)$$

$$L[f''(t)] = p^2F(p) - pf(0+0) - f'(0+0)$$

Интегрирование:

$$L\left[\int_0^t f(t') dt'\right] = \frac{F(p)}{p}.$$

Обратным преобразование Лапласа называется интеграл

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} F(p) e^{pt} dp$$
$$\sigma_1 > \sigma_0$$

для каждого $t > 0$, где $f(t)$ непрерывна.

Для проведения обратного преобразования Лапласа часто бывает полезным разложение Хевисайда.

Для проведения обратного преобразования Лапласа часто бывает полезным разложение Хевисайда. Если $F(p)$ рациональная алгебраическая функция, выраженная отношением двух многочленов

$$F(p) = \frac{D_1(p)}{D(p)},$$

причем степень многочлена $D(p)$ выше степени многочлена $D_1(p)$, то $L^{-1}[F(p)]$ равно сумме вычетов функции $F(p)e^{pt}$ по всем особым точкам $F(p)$.

1. Если $D(p) = a_0(p-p_1)(p-p_2)\dots(p-p_n)$, то

$$L^{-1}[F(p)] = L^{-1}\left[\frac{D_1(p)}{D(p)}\right] = \sum_{k=1}^n \frac{D_1(p_k)}{D'(p_k)} e^{p_k t}.$$

2. Если $D(p) = a_0(p-p_1)^{m_1}(p-p_2)^{m_2}\dots(p-p_n)^{m_n}$, то

$$L^{-1}[F(p)] = L^{-1}\left[\frac{D_1(p)}{D(p)}\right] = \sum_{k=1}^n \frac{1}{(m_k-1)!} \left[\frac{(p-p_k)^{m_k} D_1(p) e^{pt}}{D(p)} \right]_{p=p_k}^{(m_k-1)}.$$

Здесь $\left[\frac{(p-p_k)^{m_k} D_1(p) e^{pt}}{D(p)} \right]_{p=p_k}^{(m_k-1)}$ производная (m_k-1) порядка по параметру p .

Ниже приведены некоторые частные случаи разложения Хевисайда.

Изображение	Оригинал
$\frac{1}{p}$	1
$\frac{1}{p^n}$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{1}{p(p+a)}$	$\frac{1}{a}(1-e^{-at})$
$\frac{1}{p(p-a)^2}$	$\frac{1}{a^2}[1-e^{at}(1-at)]$
$\frac{1}{p^2+a^2}$	$\frac{1}{a} \sin at$
$\frac{p}{p^2+a^2}$	$\cos at$

Рассмотрим в качестве примера уравнение (3.7), считая, что $U_{in}(t) = U_0 \neq U_0(t)$. В операторном виде, учитывая, что $U_C(0) = 0$, его можно записать, как

$$U(p) + RCpU(p) = \frac{U_0}{p}.$$

Откуда

$$U(p) = \frac{U_0}{RC} \frac{1}{p(p + 1/RC)}.$$

Используя обратное преобразование Лапласа, получим

$$U_C = U_0(1 - e^{-t/RC}),$$

что совпадает с решением данной задачи, проведенным методом характеристического уравнения.

3.3. Метод интеграла Дюамеля

Часто трудности анализа импульсных процессов связаны не столько со сложностью самой электрической цепи, сколько со сложностью воздействующего на нее сигнала. В этих случаях полезными могут оказаться методы, основанные на принципе суперпозиции. Входной сигнал представляется в виде суммы простых, элементарных сигналов. Воздействие таких сигналов на исследуемую цепь, в частности, может быть исследовано аналитически, с помощью уже рассмотренных методов. Выходной сигнал может быть получен суммированием откликов цепи на элементарные воздействия. В качестве элементарных сигналов может быть использованы гармонические функции (метод интеграла Фурье или метод гармонического анализа), единичные импульсы (метод функций Дирака), ступенчатые функции (метод интеграла Дюамеля). Суперпозиционные

методы могут быть относительно легко использованы при численном анализе процессов.

Рассмотрим метод интеграла Дюамеля. В качестве элементарного воздействия в этом случае используется ступенчатая функция

$$u(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0 \\ 1, & \text{при } t \geq 0 \end{cases}$$

Входной сигнал можно представить в виде набора элементарных функций как

$$U_{in}(n\Delta t) \approx U_{in}(0)u(n\Delta t) + \sum_{k=1}^n \Delta U_{in}(k\Delta t)u(n\Delta t - k\Delta t)$$

Здесь

$$t = n\Delta t$$

$$\Delta U_{in}(k\Delta t) = U_{in}(k\Delta t) - U_{in}[(k-1)\Delta t]$$

Функция $u(n\Delta t - k\Delta t)$ есть функция $u(n\Delta t)$, сдвинутая от начало координат на промежуток времени $k\Delta t$. При $\Delta t \rightarrow 0$, считая, что $k\Delta t = \tau$, а $\Delta t = d\tau$

$$U_{in}(t) = U_{in}(0)u(t) + \int_0^t \dot{U}_{in}(\tau)u(t-\tau)d\tau. \quad (3.33)$$

Пусть функция $v(t)$ есть отклик исследуемой цепи на элементарное воздействие, или $v(t)$ есть решение (3.24) в случае, когда его правая часть (вынуждающая сила) равна $u(t)$, $\Phi[v(t)] = u(t)$, $v(t) = \Phi^{-1}[u(t)]$. Пусть функция $U_{out}(t)$ есть выходной сигнал или решение (3.24) при внешнем воздействии $U_{in}(t)$, $U_{out} = \Phi^{-1}[U_{in}(t)]$. Тогда, применяя оператор Φ^{-1} к (3.33), выходной сигнал можно представить в виде

$$U_{out}(t) = U_{in}(0)v(t) + \int_0^t \dot{U}_{in}(\tau)v(t-\tau)d\tau \quad (3.34)$$

Последнее выражение носит название суперпозиционного интеграла, или формулы свертки, или интеграла Дюамеля. По существу, (3.34) представляет собой один из вариантов возможных записей решения уравнения (3.24).

В рассмотренном выше примере (рис.3.1), считая выходным сигналом напряжение на сопротивлении, откликом на элементарное воздействие является функция

$$v(t) = e^{-t/RC}.$$

Следовательно

$$U_{out}(t) = RJ(0)e^{-t/RC} + \int_0^t \dot{U}_{in}e^{-(t-\tau)/RC}d\tau,$$

что совпадает с выражением, полученным при решении данной задачи методом вариации постоянных.

4. Накопители энергии в импульсной технике

В задачах инерциального термоядерного синтеза, импульсной рентгенографии, накачки активных сред мощных лазеров, генерирования плотных электронных и ионных пучков и др. требуется накопление больших порций энергии, а затем ее быстрое высвобождение в виде энергии токового импульса или потока заряженных частиц. Накопители энергии обладают различной плотностью запасаемой энергии и различными временами вывода энергии. Рассмотрим некоторые накопители энергии и сравним их с точки зрения максимальной плотности запасаемой энергии.

4.1. Механические накопители энергии

Примером механического накопителя энергии может служить любой объект с конечной массой, движущийся с конечной скоростью. Например, кинетическая энергия Земли как планеты солнечной системы составляет $W \approx 2,5 \times 10^{40}$ эрг. Космические объекты обладают ещё большими энергиями вследствие их больших масс и скорости движения. В

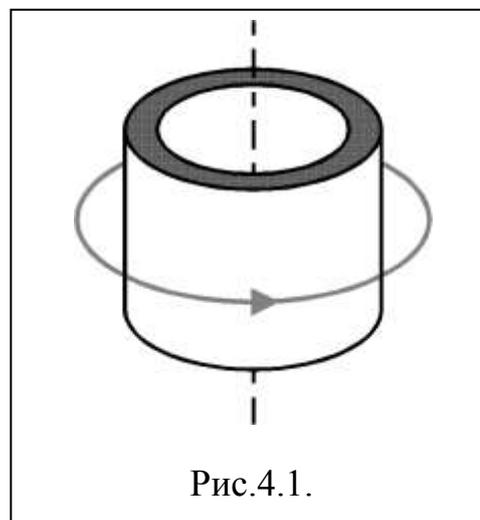


Рис.4.1.

лабораторных условиях запасаемая энергия существенно меньше. Одним из приемлемых механических накопителей энергии является маховик. Например, механическая энергия ротора электрической машины использовалась П.Л. Капицей для получения сильных магнитных полей. Для простоты рассмотрим вращающийся цилиндр.

ω – частота вращения цилиндра

r – радиус цилиндра

d – толщина стенки

Пусть стенка тонкая: $d \ll r$. Тогда энергия вращающегося цилиндра

$$W_c \approx 2\pi r d L \rho V^2 / 2 = \pi r^3 d L \rho \omega^2, \quad (4.1)$$

где L - длина цилиндра, ρ - плотность материала, $V = r\omega$ – скорость движения. При вращении цилиндра на его элементы действует сила, направленная по радиусу, разрывающая цилиндр. Величина силы, действующая на элемент объема цилиндра δA , есть

$$\delta F_R = \rho \delta A r \omega^2. \quad (4.2)$$

Направление действия этой силы такое же, как и в случае, когда внутри и снаружи цилиндра имеется разность давлений. Причем при заданной силе величина разности давлений есть

$$\Delta P = P_2 - P_1 = \frac{\delta F_R}{\delta S} = \frac{\rho \delta A r \omega^2}{\delta S} = \frac{\rho r \Delta \varphi d \delta L r \omega^2}{r \Delta \varphi \delta L} = \frac{\pi r^3 d \rho \omega^2}{\pi r^2 L} = \frac{W_c}{V_S}, \quad (4.3)$$

где V_S - объем цилиндра.

Рассмотрим теперь статическую задачу. Пусть имеется цилиндр, внутри которого давление P , превышает давление снаружи на величину ΔP . Определим разрывающую силу, которая действует на стенки цилиндра. В данном случае это будет сила F_x

$$F_x = \Delta P L \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r \cos \varphi d\varphi = \Delta P L r \sin \varphi \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} = 2\Delta P L r. \quad (4.4)$$

Напряжения, которые возникают в стенках цилиндра, определяются выражением

$$\sigma = \frac{F_x}{2dL} = P \frac{r}{d}. \quad (4.5)$$

Максимальное значение σ определяется свойством материала, из которого изготовлен цилиндр и называется пределом прочности. При малых напряжениях, когда относительное удлинение образца невелико ($\delta l/l < 2 \times 10^{-3}$), справедлив закон Гука:

$$\sigma = E \frac{\delta l}{l}, \quad (4.6)$$

или

$$\frac{\delta l}{l} = \frac{\sigma}{E}, \quad (4.7)$$

где E – модуль упругости первого рода, или модуль Юнга. Максимальное значение предела прочности для стали составляет ~ 100 кГ/мм². Поэтому

$$\sigma_{max} \approx 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{см}^3}.$$

При заданной величине предела прочности максимальная разность давлений внутри и снаружи цилиндра есть

$$\Delta P_{max} = \sigma_{max} \frac{d}{r}. \quad (4.8)$$

Максимальная энергия, запасенная в тонком вращающемся цилиндре, отнесенная к его объему, таким образом, выразится как:

$$\left(\frac{W}{V_S} \right)_{max} = \Delta P_{max} = \frac{d}{r} \sigma_{max} = \frac{2\pi r d L}{\pi r^2 L} \frac{\sigma_{max}}{2} = \frac{V_M}{V_S} \frac{\sigma_{max}}{2} \ll \sigma_{max} \quad (4.9)$$

При $V_M \approx V_S$

$$\frac{W}{V_S} \approx \sigma_{max}$$

Реальные значения плотности запасаемой энергии, полученные для механических накопителей энергии, составляют

$$\frac{W}{V_S} < 100 \frac{\text{Дж}}{\text{см}^3}.$$

4.2. Индуктивные накопители энергии

Энергию можно накапливать не только в виде механической энергии (кинетической) или гравитационной (потенциальной), но и в виде электрической, магнитной или электромагнитной. Рассмотрим магнитные или индуктивные накопители энергии.

Если по проводнику пропускать ток, то в пространстве, окружающей проводник, и внутри проводника будет существовать магнитное поле. Магнитное поле в данном случае создается проводником с током, а энергия магнитного поля черпается из источника, который возбуждает ток в проводнике. С точки зрения электрической цепи виток с током представляет собой индуктивность L , если активное сопротивление проводника мало, $R \ll \omega L$, где $\omega \approx 2\pi/T$, T – характерное время изменения тока. Энергия, накопленная в индуктивности в системе СИ $W_L = LJ^2/2$, в системе СГС $W_L = LJ^2/2c^2$. Эта энергия есть **энергия магнитного поля, которое создается протекающим током.**

Рассмотрим систему проводников с простейшей геометрией, а именно, длинный соленоид, радиус которого $r_S \ll l_S$, где l_S – длина соленоида. В этом случае можно считать, что поле в соленоиде однородно, а концевыми эффектами можно пренебречь

Для такой конфигурации проводников магнитное поле вычисляется достаточно просто. Действительно, в системе СГС, в квазистационарном приближении

$$\text{rot}\vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (4.10)$$

Проинтегрируем обе части уравнения, тогда

$$\int \text{rot} \vec{H} d\vec{S} = \int \vec{H} d\vec{l} = H_z l_s \quad (4.11)$$

$$\int \frac{4\pi}{c} \vec{j} dS = \frac{4\pi}{c} JN, \quad (4.12)$$

где H_z – магнитное поле, создаваемое длинным соленоидом с числом витков N и током J . Отсюда

$$H_z = \frac{4\pi}{c} \frac{JN}{l_s} \quad (4.13)$$

Энергия, запасаемая в магнитном поле

$$W_H = \int \frac{\vec{H}^2}{8\pi} dV. \quad (4.14)$$

Для длинного соленоида

$$W_H = \frac{H_z^2}{8\pi} V = 2\pi \frac{J^2 N^2}{c^2 l_s^2} \pi r_s^2. \quad (4.15)$$

Очевидно, что ограничения по плотности запасаемой энергии, как и для случая механических накопителей энергии, связаны с механической прочностью материала, из которого изготовлен соленоид. При протекании тока по виткам внутри соленоида создается давление, стремящееся разорвать соленоид. На единицу объема вещества с током действует сила

$$\vec{f} = \frac{1}{c} [\vec{j} \vec{H}] \quad (4.16)$$

или

$$\vec{f} = -\nabla \frac{H^2}{8\pi}. \quad (4.17)$$

В данном случае эта сила направлена по радиусу соленоида наружу. Давление, создаваемое магнитным полем внутри соленоида есть

$$P = \frac{H_z^2}{8\pi}, \quad (4.18)$$

а плотность запасаемой энергии

$$\boxed{\frac{W}{V_s} = P \ll \sigma_{max} \approx 10^3 \frac{\text{Дж}}{\text{см}^3}}. \quad (4.19)$$

В неразрушаемых многовитковых соленоидах в настоящее время достигается $\sim 40 \text{ Дж/см}^3$. Это соответствует значениям магнитных полей $H \approx 10^5 \text{ Э}$.

4.3. Емкостные накопители энергии

Емкостные накопители энергии наиболее часто используются в мощной импульсной технике. Энергия, запасаемая в емкостном накопителе, есть энергия электрического поля. Простейшей моделью емкостного накопителя является плоский конденсатор, для которого расстояние между двумя плоскостями $d \ll l$, где l - характерный размер пластин, являющихся электродами конденсатора. В этом случае электрическое поле между пластинами можно считать однородным

Электрическое поле между пластинами конденсатора

$$E = \frac{U}{d}, \quad (4.20)$$

где U - разность потенциалов между пластинами. Энергия, накопленная в конденсаторе, есть

$$W_E = \int \varepsilon \frac{\bar{E}^2}{8\pi} dV. \quad (4.21)$$

Здесь ε - относительная диэлектрическая проницаемость среды. Для плоского конденсатора

$$W_E = \varepsilon \frac{E^2}{8\pi} Sd = \frac{1}{8\pi} \varepsilon U^2 \frac{S}{d}. \quad (4.22)$$

Ограничения по плотности запасаемой энергии для емкостных накопителей энергии связаны с *электрической прочностью среды*, в которой происходит накопление энергии. Максимальные поля, достижимые в некоторых средах приведены в таблице 2.

Таблица 2

Среда	ε	E_{\max}
Воздух при давлении 1 атм.	1	30 кВ/см
Трансформаторное масло	2,2-2,5	300 кВ/см
Полиэтилентерефталат (пленка)	~2.5	1000 кВ/см

Плотность запасаемой энергии в емкостных накопителях энергии составляет для различных диэлектриков

$$\frac{W_{E \max}}{V} = \varepsilon \frac{E_{\max}^2}{8\pi} = (0,01 - 1) \frac{\text{Дж}}{\text{см}^3}.$$

4.4. Химические накопители энергии

К химическим накопителям энергии можно отнести аккумуляторы и взрывчатые вещества (ВВ). Энергия связи молекул составляет ~0,1-10 эВ. Поэтому при плотности вещества $n \sim 10^{22} \text{ см}^{-3}$ плотность энергии, которая может высвободиться при протекании химических реакций, составляет $\sim 10^2 - 10^4 \text{ Дж/см}^3$. Если из аккумуляторов энергия может быть выведена в виде электрической энергии, то для ВВ это достаточно сложно. Обычно

ВВ используются совместно с дополнительными емкостными или индуктивными накопителями энергии.

Пример 1

Рассмотрим плоский конденсатор с емкостью C_0 , заряженный до напряжения U_0 . Энергия, накопленная в конденсаторе $W_0 = C_0 U_0^2 / 2$, а заряд на обкладках конденсатора $q = C_0 U_0$. Пусть между пластинами конденсатора находится взрывчатое вещество.

В результате взрыва расстояние между обкладками конденсатора d будет увеличиваться. При этом величина заряда сохраняется. Следовательно,

$$U(t) = U_0 \frac{C_0}{C(t)} = U_0 \frac{d(t)}{d_0} > U_0 \quad (4.23)$$

Энергия в конденсаторе будет увеличиваться пропорционально расстоянию между обкладками $d(t)$:

$$\boxed{W(t) = W_0 \frac{d(t)}{d_0}}. \quad (4.24)$$

В данном случае рост энергии связан с работой по перемещению (разлету) пластин конденсатора за счет расширяющегося диэлектрика (ВВ), т.е., с преобразованием энергии ВВ в электрическую энергию.

Пример 2

Другим вариантом комбинированного источника может быть идеальный замкнутый проводник с током, геометрия которого изменяется при взрыве ВВ. Взрывчатое вещество находится вне контура с током. В результате взрыва контур сжимается. Поскольку потерями пренебрегается, магнитный поток через замкнутый контур сохраняется при его деформации. Это следует из уравнения поля для движущихся проводников, когда э.д.с.

$$\varepsilon = -\frac{1}{c} \frac{d\phi}{dt} . \quad (4.25)$$

Поскольку проводник идеальный, а именно этот случай рассматривается, то э.д.с. в контуре всегда равна нулю. В противном случае ток в контуре может быть сколь угодно большим, а это противоречит предположению о конечной величине запасаемой энергии в контуре. Отсюда следует, что

$$L(t)J(t) = L_0J_0 = const . \quad (4.26)$$

Для однослойного соленоида длиной l_S :

$$L = 4\pi \frac{S_S}{l_S} . \quad (4.27)$$

Поэтому при радиальном сжатии *ток и энергия магнитного поля возрастают обратно пропорционально сечению соленоида.*

$$\boxed{J(t) = J_0 \frac{S_0}{S(t)}} , \quad \boxed{W(t) = W_0 \frac{S_0}{S(t)}} . \quad (4.28)$$

5. Зарядка емкостных и индуктивных накопителей энергии

5.1. Резистивная зарядка емкостных накопителей

Схема электрической цепи резистивной зарядки емкостного накопителя представлена на рисунке 5.1. Будем считать, что в начальный момент времени емкость не заряжена. При замыкании ключа в цепи начинает течь ток. Рассмотрим процесс зарядки конденсатора. Процессы в цепи описываются уравнением:

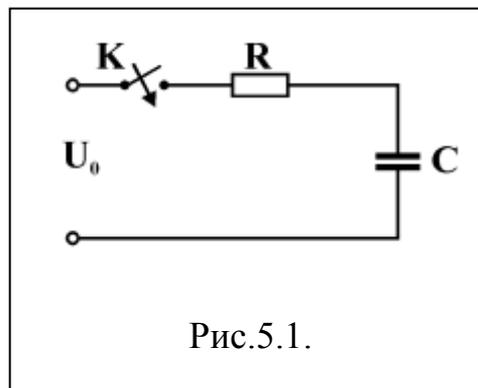


Рис.5.1.

Процессы в цепи описываются уравнением:

$$\frac{1}{C} \int J dt + JR = U_0. \quad (5.1)$$

Поскольку $U_0 \neq U_0(t)$, то в дифференциальной форме это уравнение имеет вид

$$\dot{J} + \frac{1}{RC} J = 0. \quad (5.2)$$

Здесь C – емкость накопителя, R – сопротивление контура, J – ток в контуре. Это уравнение должно решаться при начальном условии

$$J(t)|_{t=0} R = U_0, \quad (5.3)$$

которое означает, что в начальный момент времени емкость является незаряженной. Данное начальное условие может быть получено непосредственно из уравнения в интегральной форме при $t=0$ при условии, что $U_C(t=0) = 0$. Решением уравнения (5.2) является функция

$$J(t) = J_0 e^{-\frac{t}{RC}}, \quad (5.4)$$

где константа интегрирования:

$$J_0 = \frac{U_0}{R}. \quad (5.5)$$

И, таким образом, ток в цепи и напряжение на конденсаторе после включения коммутатора при $t=0$, описываются выражениями:

$$\boxed{\begin{aligned} J(t) &= \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \\ U_C &= U_0 - JR = U_0(1 - e^{-\frac{t}{RC}}) \end{aligned}}. \quad (5.6)$$

Как видно, характерным масштабом времени зарядки является величина $\tau = RC$. В начальные моменты времени, когда $t \ll RC$, ток в цепи ограничен только активным сопротивлением контура, $J(t \ll RC) \approx U_0/R$, а при $t \gg RC$ ток стремится к нулю. Напряжение на конденсаторе в начальные моменты времени линейно зависит от времени и стремится к U_0 при $t \gg RC$:

$$U_C \approx \begin{cases} \frac{t}{RC} U_0; & \text{при } \frac{t}{RC} \ll 1 \\ U_0; & \text{при } \frac{t}{RC} \gg 1 \end{cases}. \quad (5.7)$$

Найдем эффективность резистивной зарядки емкостного накопителя энергии:

$$\eta_C = \frac{W_C}{W_C + \int J^2 R dt} = \frac{1}{2} \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right). \quad (5.8)$$

Как видно из (5.7),

$$\eta_C \approx \begin{cases} \frac{t}{RC}; & \text{при } \frac{t}{RC} \ll 1 \\ \frac{1}{2}; & \text{при } \frac{t}{RC} \gg 1 \end{cases}. \quad (5.9)$$

Как видно из (5.9), даже длительная резистивная зарядка емкостного накопителя сопряжена с 50% - омическими потерями в зарядном резисторе. Поэтому ясно, что подобные простейшие зарядные устройства находят применение в тех случаях, когда низкая энергетическая эффективность не приводит к перегреву резистора.

5.2. Резистивная зарядка индуктивных накопителей

На рис.5.2 приведена схема резистивной зарядки индуктивного накопителя. Пусть в начальный момент

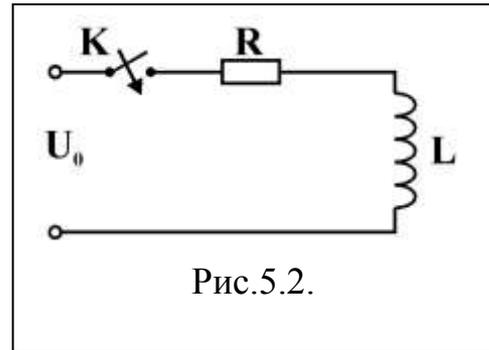


Рис.5.2.

времени ток в цепи отсутствует и, следовательно, энергия магнитного поля в накопителе равна нулю. После замыкания ключа начинается процесс зарядки накопителя. Согласно второму закону Кирхгофа

$$L \frac{dJ}{dt} + JR = U_0, \quad (5.10)$$

$$J(t=0) = 0$$

Уравнение (5.10) есть неоднородное дифференциальное уравнение первого порядка. Однородное уравнение имеет вид:

$$L \frac{dJ}{dt} + JR = 0. \quad (5.11)$$

Его решение $J = J_0 e^{-\frac{t}{L/R}}$. Используя метод вариации постоянной, решение можно представить в виде:

$$J(t) = J_0(0) e^{-\frac{t}{L/R}} + e^{-\frac{t}{L/R}} \int_0^t \frac{U_0}{L} e^{\frac{t'}{L/R}} dt'.$$

Поскольку $J(0) = 0$ то

$$J(t) = \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{t}{L/R}} \right). \quad (5.12)$$

Из (5.10) следует, что

$$U_L = L \frac{dJ}{dt} = U_0 - JR = U_0 e^{-\frac{t}{L/R}}. \quad (5.13)$$

Эффективность резистивной зарядки индуктивного накопителя:

$$\eta_L = \frac{W_L}{W_L + \int J^2 R dt} = \frac{\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right)^2}{\frac{t}{\tau} - \frac{1}{2} \left(1 - e^{-\frac{2t}{\tau}} \right)}, \quad (5.14)$$

где $\tau_L = L/R$:

$$\eta_L \approx \begin{cases} 1; & \text{при } \frac{t}{\tau} \ll 1 \\ \frac{\tau_L}{t} \ll 1; & \text{при } \frac{t}{\tau} \gg 1 \end{cases}. \quad (5.15)$$

Как видно, эффективность резистивной зарядки индуктивных накопителей близка к единице только при малых временах, когда $t \ll L/R$. Но в этом случае величина тока относительно мала $J(t \ll L/R) \ll J_{max} = U_0/R$. При больших временах ток достигает максимальных значений, однако эффективность зарядки уже низка. Энергия, потерянная в активном сопротивлении в этом случае существенно превышает энергию, накопленную в индуктивности.

5.3. Индуктивная зарядка емкостных накопителей

Схема индуктивной зарядки емкостного накопителя приведено на рис. 5.3. Будем считать, что в начальный момент времени емкость является незаряженной, а ток в цепи равен нулю. Согласно уравнению Кирхгофа после включения ключа процессы в цепи описываются уравнением:

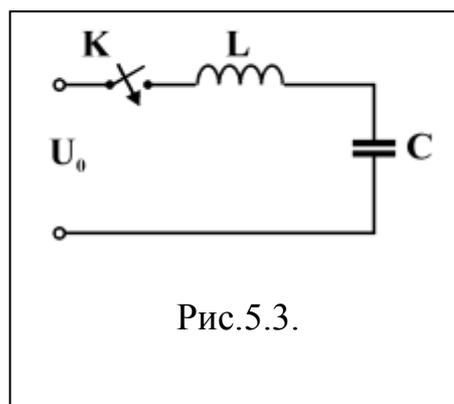


Рис.5.3.

$$L\dot{J} + \frac{1}{C} \int J dt = U_0. \quad (5.16)$$

Дифференцируя (16) и учитывая, что U_0 не зависит от времени, получаем:

$$\ddot{J} + \omega_0^2 J = 0, \quad (5.17)$$

где $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ – собственная частота колебательного контура. Уравнение (5.17) должно решаться при начальных условиях:

$$\begin{cases} J(0) = 0 \\ LJ'(0) = U_0 \end{cases}. \quad (5.18)$$

Общим решением (5.17) является сумма двух независимых решений

$$J(t) = \sum_{k=1}^2 A_k e^{-i\lambda_k t}, \quad (5.19)$$

где собственные числа задачи λ_k есть решение характеристического уравнения:

$$\lambda_k^2 = -\omega_0^2. \quad (5.20)$$

Учитывая начальные условия, нетрудно получить

$$\left. \begin{aligned} J &= \frac{U_0}{\rho} \sin \omega_0 t \\ U_L &= U_0 \cos \omega_0 t \\ U_C &= U_0(1 - \cos \omega_0 t) \end{aligned} \right\}, \quad (5.21)$$

где $\rho = \sqrt{L/C}$ - характеристическое или волновое сопротивление колебательного контура.

Максимальный ток в цепи достигается в момент времени $t = \pi / 2\omega_0 = \frac{\pi}{2} \sqrt{LC}$. В этот момент времени энергия, накопленная в индуктивности $W_L = LU_0^2 / 2\rho^2 = CU_0^2 / 2$, то есть, равна энергии, запасенной в этот же момент в конденсаторе. Максимальное напряжение на конденсаторе $U_C^{max} = 2U_0$ достигается в момент времени $t = \pi / \omega_0 = \pi \sqrt{LC}$. Энергия, накопленная в конденсаторе, $W_C = 2CU_0^2$.

Из уравнения (4.21) нетрудно получить, что

$$\frac{d}{dt}(W_L + W_C) = UJ.$$

Интегрируя это уравнение, получим:

$$W_L + W_C = W_0 + \int_0^t UJ dt.$$

Учитывая (5.21), для рассматриваемого случая

$$W_L + W_C = CU_0^2(1 - \cos \omega t).$$

Примечание

Если начальное значение напряжения на конденсаторе не равно нулю, то из уравнения Кирхгофа для $t = 0$ следует, что

$$L\dot{J}|_{t=0} = U_0 - U_C(0), \quad (5.22)$$

или

$$J_0 = \frac{U_0 - U_C(0)}{\rho}. \quad (5.23)$$

В частности, если $U_C(0) = U_0$, то $J_0 = 0$. Для произвольного начального напряжения

$$\begin{aligned} U_L &= [U_0 - U_C(0)] \cdot \cos \omega_0 t \\ U_C &= U_0 - [U_0 - U_C(0)] \cdot \cos \omega_0 t \end{aligned} \quad (5.24)$$

Если, например, $U_C(0) = -\alpha U_0$, то $U_C^{max} = 2 \left(1 + \frac{\alpha}{2} \right) U_0$.

5.4. Индуктивная зарядка емкостных накопителей с учетом активных потерь

Схема зарядки емкостного накопителя представлена на рис.5.4. Процессы в цепи описываются уравнением

$$L \frac{dJ}{dt} + RJ + \frac{1}{C} \int J dt = U_0 \quad (5.25)$$

или, после дифференцирования:

$$\ddot{J} + 2\gamma \dot{J} + \omega_0^2 J = 0, \quad (5.26)$$

где $\gamma = R/2L$ – *декремент затухания*, ω_0^2 – собственная частота контура без потерь. Решение уравнения (26) будем искать в виде:

$$J = \sum_{k=1}^2 A_k e^{\lambda_k t}, \quad (5.27)$$

где λ_k – корни характеристического уравнения

$$\lambda_k^2 + 2\gamma \lambda_k + \omega_0^2 = 0. \quad (5.28)$$

Решение (28) есть

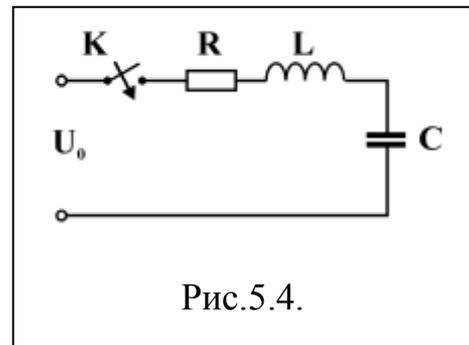


Рис.5.4.

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}. \quad (5.29)$$

Ниже рассмотрим вид решения уравнения (4.26) при различных соотношениях между декрементом затухания и собственной частотой колебательного контура без потерь.

Случай А. Пусть $\boxed{\omega_0^2 > \gamma^2}$. Это условие эквивалентно $\rho > R/2$ или $RC < L/4R$, где $\rho = \sqrt{L/C}$ – характеристическое сопротивление колебательного контура без потерь. В этом случае собственные числа задачи комплексные,

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\omega_r \quad (5.30)$$

что означает, что *в контуре существуют собственные колебания с частотой*

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \gamma^2 / \omega_0^2}. \quad (5.31)$$

В отличие от контура без потерь $\omega_r < \omega_0$.

В данном случае решение (5.26) с учетом начальных условий можно представить в виде:

$$\begin{aligned} J &= \frac{U_0}{L\omega_r} e^{-\frac{Rt}{2L}} \sin \omega_r t \\ U_L &= U_0 e^{-\frac{Rt}{2L}} \left(\cos \omega_r t - \frac{R}{2L\omega_r} \sin \omega_r t \right) \\ U_C &= U_0 \left[1 - e^{-\frac{Rt}{2L}} \left(\cos \omega_r t - \frac{R}{2L\omega_r} \sin \omega_r t \right) \right] \end{aligned} \quad (5.32)$$

При малом декременте затухания, когда $\gamma^2 \ll \omega_0^2$ или $R^2 \ll \rho^2$, частота колебаний близка к ω_0 :

$$\omega_r \approx \omega_0 \left(1 - \frac{\gamma^2}{2\omega_0^2} \right), \quad \frac{\omega_0 - \omega_r}{\omega_0} \approx \frac{\gamma^2}{2\omega_0^2} \ll 1. \quad (5.33)$$

В этом случае в (5.32) произведение $L\omega_r \approx \rho \left(1 - \gamma^2 / 2\omega_0^2 \right)$ близко к волновому сопротивлению контура без потерь, а максимальное напряжение на конденсаторе близко к удвоенному напряжению внешнего источника,

$$U_C^{max} \approx 2U_0 \left(1 - \frac{\pi R}{4 \rho} \right). \quad (5.34)$$

Энергия, которая теряется в активном сопротивлении в течение времени зарядки конденсатора, есть

$$W_R = \int_0^{\pi\sqrt{LC}} J^2 R dt \approx 2CU_0^2 \frac{\pi R}{4 \rho}. \quad (5.35)$$

И, таким образом, энергия, забираемая из источника за время зарядки, оказывается несколько больше, чем в отсутствии потерь.

$$W_\Sigma = W_C + W_R \approx 2CU_0^2 \left(1 - \frac{\pi R}{2 \rho} \right) + 2CU_0^2 \frac{\pi R}{4 \rho} = 2CU_0^2 \left(1 - \frac{\pi R}{4 \rho} \right). \quad (5.36)$$

Примечание:

Добротностью колебательной системы называется величина

$$Q = \frac{W\omega}{P}, \quad (5.37)$$

где W – энергия колебаний, накопленная в системе, ω – частота колебаний, P – средняя мощность потерь за период. Для колебательного контура с потерями добротность есть

$$Q = \pi \frac{CU_0^2}{\int_0^{2\pi/\omega_0} J^2 R dt} = \pi \frac{LJ_0^2}{\int_0^{2\pi/\omega_0} J^2 R dt} = \frac{\rho}{R}. \quad (5.38)$$

Случай Б. Положим $\boxed{\omega_0 < \gamma}$. Это условие эквивалентно $\rho < R/2$ или $RC > 4L/R$. В этом случае корни характеристического уравнения являются чисто действительными, а колебаний в контуре нет. Такое решение называется аperiодическим затуханием. Учитывая начальные условия, нетрудно получить решение (5.26) для рассматриваемого случая:

$$\begin{aligned} J &\approx \frac{U_0}{L\lambda_2} \frac{1}{1 - \lambda_1/\lambda_2} \left(e^{\lambda_2 t} - e^{\lambda_1 t} \right) \\ U_L &\approx U_0 \frac{1}{1 - \lambda_1/\lambda_2} \left(e^{\lambda_2 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} e^{\lambda_1 t} \right) \\ U_C &\approx U_0 \left[1 - \frac{1}{1 - \lambda_1/\lambda_2} \left(e^{\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} e^{\lambda_2 t} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.39)$$

Пусть, например, $\gamma^2 \gg \omega_0^2$ или $RC \gg L/R$, $R^2 \gg \rho^2$. Тогда

$$\begin{aligned} \lambda_1 &\approx -\frac{\omega_0^2}{2\gamma} = -\frac{1}{RC}, \\ \lambda_2 &\approx -2\gamma = -\frac{R}{L} \end{aligned} \quad (5.40)$$

$\lambda_1/\lambda_2 \approx \rho^2/R^2$, $L\lambda_2 \approx -R$, а решение (5.39) можно представить в виде:

$$\begin{aligned} J &= \frac{U_0}{R} \frac{1}{1 - \rho^2/R^2} \left(e^{-\frac{t}{RC}} - e^{-\frac{Rt}{L}} \right) \approx \frac{U_0}{R} \left(e^{-\frac{t}{RC}} - e^{-\frac{Rt}{L}} \right) \\ U_L &= U_0 \frac{1}{1 - \rho^2/R^2} \left(e^{-\frac{Rt}{L}} - \frac{\rho^2}{R^2} e^{-\frac{t}{RC}} \right) \approx U_0 \left(e^{-\frac{Rt}{L}} - \frac{\rho^2}{R^2} e^{-\frac{t}{RC}} \right) \\ U_C &= U_0 \left[1 - \frac{1}{1 - \rho^2/R^2} \left(e^{-\frac{t}{RC}} - \frac{\rho^2}{R^2} e^{-\frac{Rt}{L}} \right) \right] \approx U_0 \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}} \right) \end{aligned} \quad (5.41)$$

В этом предельном случае в масштабе времени зарядки конденсатора напряжение на индуктивности ($U_L \approx U_0$) существует в течение короткого

промежутка времени после срабатывания коммутатора. Это время $\Delta t \approx L/R \ll RC$. В течение этого промежутка времени напряжение на конденсаторе мало, $U_C \ll U_0$. При $t \gg L/R$ напряжение на индуктивности $U_L \ll U_0$, а за время $\Delta t \approx RC$ происходит зарядка конденсатора до напряжения U_0 . Ток достигает максимального значения за время $\tau_L \approx \frac{2L}{R} \ln \frac{R}{\rho}$. В этот же момент времени напряжение на индуктивности меняет знак.

В начальные моменты времени, когда $t \leq L/R$, поведение тока описывается выражением

$$J \approx \frac{U_0}{R} \left(1 - e^{-\frac{Rt}{L}} \right). \quad (5.42)$$

При $t \ll L/R$ ток в основном ограничен индуктивностью $J \approx U_0 t / L$. При $t \gg L/R$

$$J \approx \frac{U_0}{R} e^{-\frac{t}{RC}} \quad (5.43)$$

как и в случае отсутствия индуктивности. Максимальное значение тока $J \approx \frac{U_0}{R}$ достигается при $t \approx \frac{2L}{R} \ln \frac{R}{\rho}$.

Поведение тока во времени показано на рисунке 5.5:

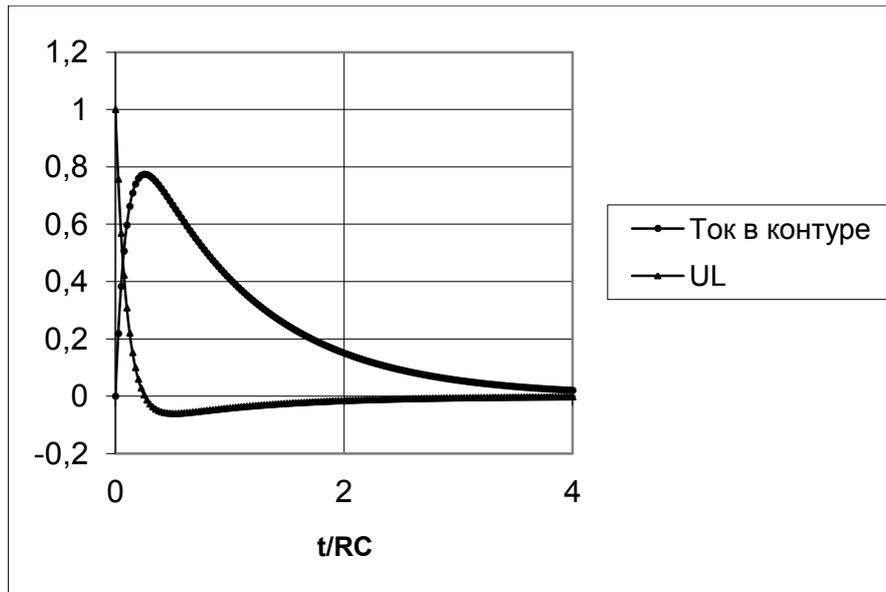


Рис.5.5.

Случай С. Пусть $\omega_0^2 = \gamma^2$. В этом случае решение уравнения (5.26) можно получить, например, предельным переходом $\omega \rightarrow \gamma + 0$ из решения, полученного при $\omega_0^2 > \gamma^2$. Действительно, при $\omega_0^2 > \gamma^2$ решение (5.26) есть

$$J = \frac{U_0}{L\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}} e^{-\frac{Rt}{2L}} \sin \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t. \quad (5.44)$$

При любых конечных t и $\omega \rightarrow \gamma + 0$ (5.44) можно разложить в ряд, так что

$$J = \frac{U_0 t}{L} e^{-\frac{Rt}{2L}}$$

$$U_L = U_0 \left(1 - \frac{Rt}{2L}\right) e^{-\frac{Rt}{2L}}. \quad (5.45)$$

$$U_C = U_0 \left[1 - e^{-\frac{Rt}{2L}} \left(1 + \frac{Rt}{2L}\right) \right]$$

Максимальное значение тока $J = \frac{2U_0}{eR}$ достигается в момент времени $t = 2L/R$.

6. Вывод энергии из емкостных и индуктивных накопителей

6.1. Разряд емкостного накопителя на активную нагрузку.

Схема разряда емкостного накопителя на активную нагрузку представлена на рис.6.1. В этом случае уравнения, описывающие процессы в контуре, принимает вид

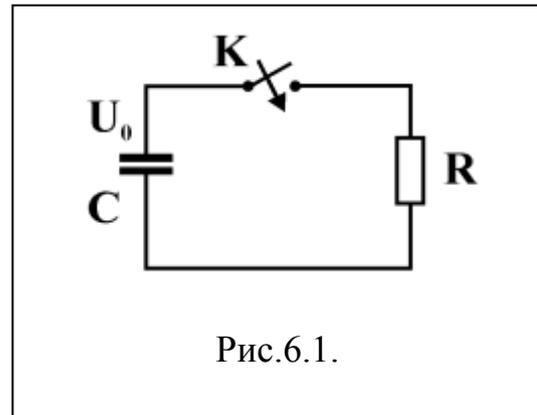


Рис.6.1.

$$\frac{1}{C} \int J dt + JR = 0, \quad (6.1)$$

где сторонние э.д.с. отсутствуют.

Пусть $U_C = -\frac{1}{C} \int J dt$. Уравнение (1) будем решать при начальном условии

$U_C(0) = J(0)R = U_0$. Решение (6.1) можно записать в виде:

$$J = \frac{U_0}{R} e^{-t/RC} \quad (6.2)$$

$$U_C = U_0 e^{-t/RC}$$

Время нарастания тока на активной нагрузке равно нулю. Энергия, поглощенная нагрузкой

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J^2 R dt = C \frac{U_0^2}{2} \int_0^{2t/RC} e^{-x} dx = C \frac{U_0^2}{2} (1 - e^{-2t/RC}). \quad (6.3)$$

Эффективность вывода энергии, как функция времени (Рис.6.2), выражается:

$$\eta = 1 - e^{-2t/RC}$$

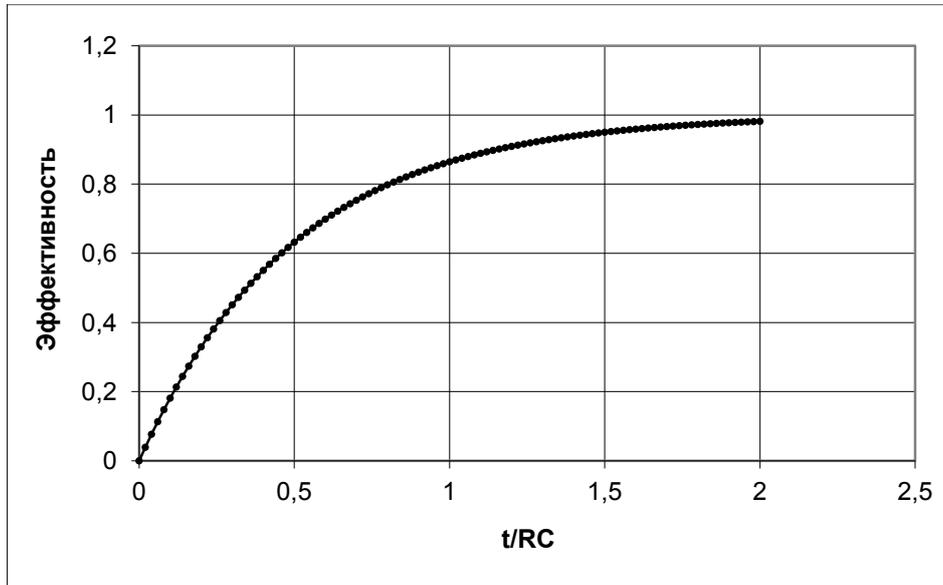


Рис.6.2.

Следовательно, энергия из конденсатора при активной нагрузке может быть выведена за время $\tau \approx RC$. В этом случае $\eta \approx 0.9$.

6.2. Вывод энергии из емкостного накопителя в активную нагрузку с учетом индуктивности разрядного контура

Схема вывода энергии для данного случая представлена на рис.6.3. Уравнения, описывающие процессы в контуре, имеют вид:

$$\frac{1}{C} \int J dt + JR + L \frac{dJ}{dt} = 0 \quad (6.4)$$

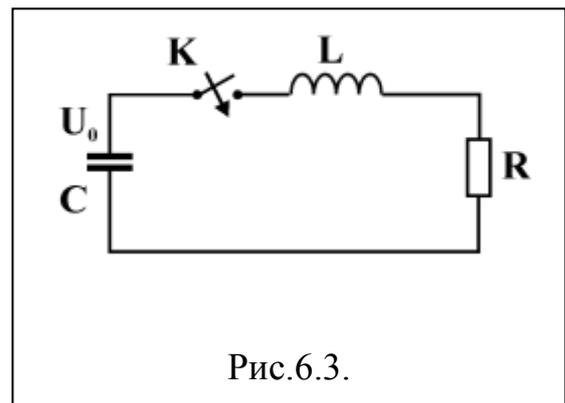


Рис.6.3.

Введем обозначение: $U_C = -\frac{1}{C} \int J dt$. Поскольку в разрядной цепи присутствует индуктивность, то задача должна решаться при начальных условиях

$$\begin{aligned} U_C(0) &= LJ(0) = U_0 \\ J(0) &= 0 \end{aligned} \quad (6.5)$$

Общее решение уравнения (6.4) есть:

$$J = A_1 e^{\lambda_1 t} + A_2 e^{\lambda_2 t}, \quad (6.6)$$

где $\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}$, $\gamma = R/2L$. Поскольку $J(0) = 0$, то $A_1 = -A_2$, а

$$J = A_1 (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}). \quad (6.7)$$

Учитывая второе начальное условие:

$$U_C(0) = LJ(0) = U_0 \Rightarrow LA_1(\lambda_1 - \lambda_2) = U_0. \quad (6.8)$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} J &= -\frac{U_0}{L\lambda_2(1 - \lambda_1/\lambda_2)} (e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t}) \\ U_L &= -U_0 \frac{1}{1 - \lambda_1/\lambda_2} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} e^{\lambda_1 t} - e^{\lambda_2 t} \right) \\ U_C &= JR + LJ = U_0 \frac{1}{1 - \lambda_1/\lambda_2} \left(e^{\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2} e^{\lambda_2 t} \right). \end{aligned} \quad (6.9)$$

Случай А. Активное сопротивление нагрузки $R^2 \gg \rho^2$.

Одним из возможных требований такого способа вывода энергии является отсутствие колебаний в контуре (апериодический разряд) и малое время нарастания тока или ситуация, когда $R^2 \gg \rho^2$. Отсюда следует, что $RC \gg L/R$.

В этом случае решение есть:

$$J = \frac{U_0}{R} \left(e^{-t/RC} - e^{-Rt/L} \right)$$

$$U_L = -U_0 \frac{1}{1 - \rho^2/R^2} \left(\frac{\rho^2}{R^2} e^{-t/RC} - e^{-Rt/L} \right) \quad (6.10)$$

$$U_C = U_0 \frac{1}{1 - \rho^2/R^2} \left[e^{-t/RC} - \frac{\rho^2}{R^2} e^{-Rt/L} \right] \approx U_0 e^{-t/RC}.$$

Как видно, поведение тока и напряжения на индуктивности аналогично задаче о зарядке конденсатора при низком волновом сопротивлении. Ток в цепи нарастает до значения $J_0 \approx U_0/R$ за время $\tau_L \approx L/R$. Максимальное напряжение на индуктивности $U_L \approx U_0$. Разряд конденсатора происходит с характерным временем $\tau_C \approx RC$.

Случай Б. Активное сопротивление нагрузки $R < 2\rho$.

В данном случае $\omega_0^2 > \gamma^2$, поэтому

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\omega_r, \quad (6.11)$$

и в контуре существуют собственные колебания с частотой

$$\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \gamma^2/\omega_0^2} = \omega_0 \sqrt{1 - R^2/4\rho^2}. \quad (6.12)$$

Тогда решение (4) можно записать в виде

$$J = e^{-\gamma t} \left(A_1 e^{i\omega_r t} + A_2 e^{-i\omega_r t} \right). \quad (6.13)$$

Поскольку $J(0) = 0$, то $A_1 = -A_2$ и, таким образом,

$$J = J_0 e^{-\gamma t} \sin \omega_r t. \quad (6.14)$$

Используя первое начальное условие, получаем, что $J_0 = -U_0/L\omega_r$. Таким образом, решение есть

$$J = -\frac{U_0}{L\omega_r} e^{-\gamma t} \sin \omega_r t. \quad (6.15)$$

Отметим, что формула (6.15) является основной при расчётах системы питания импульсного соленоида от конденсаторной батареи.

Ток можно представить также в виде

$$J = \frac{U_0}{\rho} \frac{1}{\sqrt{1-R^2/4\rho^2}} \exp\left(-\frac{R/2\rho}{\sqrt{1-R^2/4\rho^2}} \omega_r t\right) \sin \omega_r t. \quad (6.16)$$

При $R \rightarrow 2\rho$, время нарастания тока до максимума

$$\tau \approx \frac{1}{\gamma} = \frac{2L}{R} \quad (6.17)$$

$$J(t)^{max} \rightarrow \frac{2U_0}{eR} = \frac{1}{e} \frac{U_0}{\rho}. \quad (6.18)$$

В этом предельном случае

$$J = -\frac{U_0}{L} t e^{-\gamma t}. \quad (6.19)$$

Приведем без вывода результаты определения **максимума энерговыделения в нагрузке** за характерное время $0 \leq t \leq \tau$ в зависимости от величины $R/2\rho$. Рассмотрим случай с «колебательным» режимом разряда накопителя: $R < 2\rho$. Эффективность передачи энергии в нагрузку имеет максимум при $(R/2\rho)_{opt} = 0,442$ и составляет $\eta_{max} \approx 0,4$ (Рис.6.4).

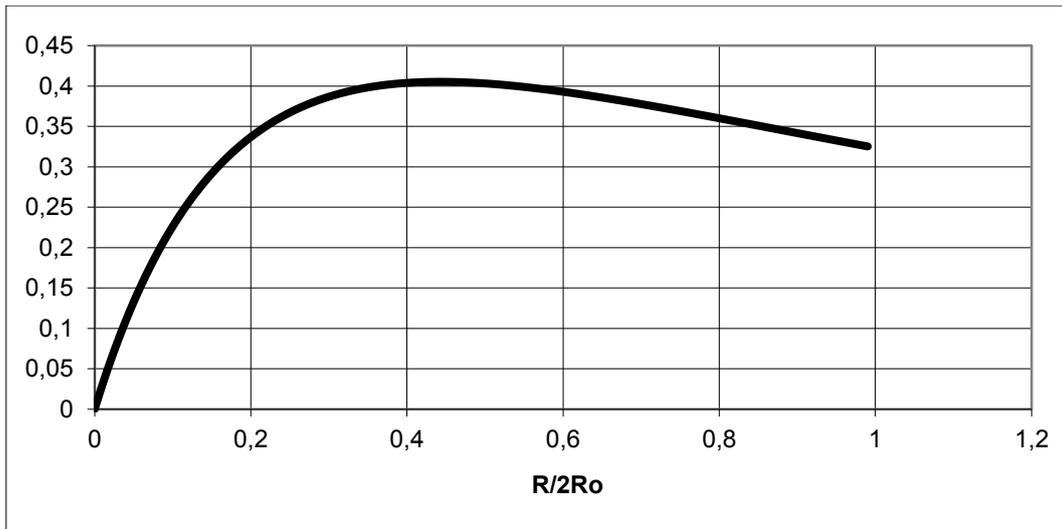


Рис.6.4.



Рис.6.5. Ток на нагрузке в оптимальном режиме $(R/2\rho)_{opt} = 0,442$.

6.3. Разряд емкостного накопителя на емкостную нагрузку

Схема, приведённая на рис.6.6, чрезвычайно широко используется в высоковольтной импульсной технике. Фактически, в тех или иных модификациях, она представляет индуктивно-емкостное звено сжатия

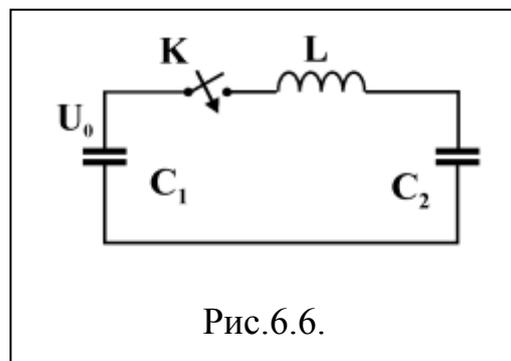


Рис.6.6.

электрической энергии и позволяет повышать мощность каскада с выходным емкостным накопителем в десятки-сотни раз и более.

Пусть $U_{C1}(0) = U_0$, а $U_{C2}(0) = 0$. Уравнение Кирхгофа для этого контура имеет вид:

$$L\dot{J} + \frac{1}{C_1} \int J dt + \frac{1}{C_2} \int J dt = 0, \quad (6.20)$$

или, после дифференцирования, -

$$\begin{cases} \ddot{J} + \omega_r^2 J = 0 \\ J(0) = 0 \\ \dot{J}(0) = U_0 / L \end{cases}, \quad (6.21)$$

где $\omega_r^2 = 1/LC_\Sigma$ – квадрат резонансной частоты контура,

$$C_\Sigma = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}. \quad (6.22)$$

Решение (21) известно:

$$J(t) = \frac{U_0}{\rho} \sin \omega_r t, \quad (6.23)$$

где $\rho^2 = L/C_\Sigma$.

Если ввести отношение $\alpha = C_1/C_2$, то $C_\Sigma = C_1 \frac{1}{1+\alpha} = C_2 \frac{\alpha}{1+\alpha}$. Тогда:

$$\begin{cases} U_{C1} = -U_0 \frac{1}{1+\alpha} (\alpha + \cos \omega_r t) \\ U_{C2} = -U_0 \frac{\alpha}{1+\alpha} (\cos \omega_r t - 1) \end{cases}. \quad (6.24)$$

Нетрудно получить, что

$$\begin{cases} U_{C2}^{max} = \frac{2\alpha}{1+\alpha} U_0 \\ U_{C1}^{min} = \frac{\alpha-1}{\alpha+1} U_0 \end{cases}. \quad (6.25).$$

Таким образом, эффективность передачи энергии из C_1 в C_2 есть

$$\eta = \frac{C_2(U_{C2}^{max})^2}{C_1U_0^2} = \frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2}. \quad (6.26)$$

Рассмотрим различные предельные случаи.

Случай 1. $C_1 \gg C_2$, $\alpha \gg 1$. Время зарядки конденсатора

$$t_0 = \pi / \omega_r \approx \pi \sqrt{LC_2}.$$

$$U_{C1} \approx U_0 \left(1 + \frac{1}{\alpha} \cos \omega_r t \right) \approx U_0; \quad U_{C1}^{min} \approx U_0$$

$$U_{C2} \approx U_0 (\cos \omega_r t - 1); \quad U_{C2}^{max} \approx 2U_0$$

Случай 2. $C_1 \ll C_2$, $\alpha \ll 1$. Время зарядки конденсатора

$$t_0 = \pi / \omega_r \approx \pi \sqrt{LC_1}.$$

$$U_{C1} \approx U_0 \cos \omega_r t \quad U_{C1}^{min} \approx -U_0$$

$$U_{C2} \approx \alpha U_0 (\cos \omega_r t - 1); \quad U_{C2}^{max} \approx 2\alpha U_0$$

Случай 3. $C_1 = C_2$, $\alpha = 1$. Время зарядки конденсатора

$$t_0 = \pi / \omega_r \approx \pi \sqrt{LC_1/2}.$$

$$U_{C1} \approx \frac{1}{2} U_0 (1 + \cos \omega_r t); \quad U_{C1}^{min} = 0$$

$$U_{C2} \approx \frac{1}{2} U_0 (\cos \omega_r t - 1); \quad U_{C2}^{max} \approx U_0$$

Примечание:

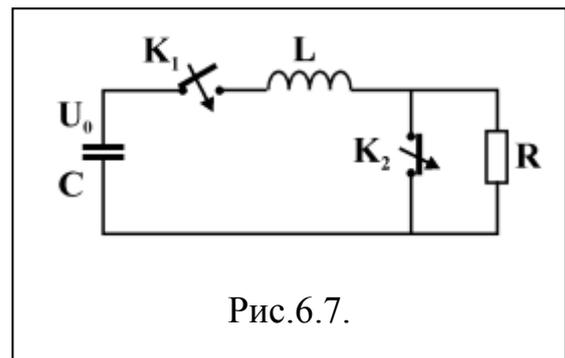
Как это ни странно на первый взгляд, большое практическое значение имеет, казалось бы, тривиальный случай «3», когда $C_1 = C_2$ и $U_{C2}^{max} \approx U_0$. Дело в том, что конденсатор C_1 может заряжаться весьма медленно, в

то время как процесс перезарядки выходного конденсатора – быстропротекающий. В идеале – имеет место 100% - передача энергии. Соответственно, конденсатор C_2 может быть более электрически прочным и компактным, и способен «отдать» энергию в последующий каскад импульсного генератора с темпом, вплоть до скорости протекания волновых процессов между его обкладками (смотри ниже, параграф 9).

В ряде задач весьма интересен случай «1», когда в процессе перезарядки имеет место увеличение напряжения на C_2 : в пределе – вплоть до удвоения (правда при низком к.п.д).

6.4. Вывод энергии из индуктивного накопителя в активную нагрузку

Рассмотрим схему (рис.6.7), которая представляет собой один из вариантов вывода энергии из индуктивного накопителя. В этой схеме использовано два ключа. Первый ключ K_1 замыкает цепь зарядки



индуктивного накопителя (closed switch), другой (K_2) служит для размыкания этой цепи и вывода энергии из индуктивного накопителя в активную нагрузку (opening switch). При включении первого ключа, энергия, предварительно накопленная в емкости, переходит в энергию магнитного поля индуктивного накопителя. При достижении максимального тока в контуре происходит срабатывание второго ключа, разрывающего ток. При этом энергия индуктивного накопителя рассеивается в активном сопротивлении (нагрузке). Будем считать, что волновое сопротивление первого контура $\rho^2 \ll R^2$, или время

$L/R \ll RC$. Кроме того, будем считать, что в момент достижения максимального тока в индуктивности напряжение на первичном емкостном накопителе равно нулю.

Рассмотрение процесса начнем с момента, когда ток в индуктивности достиг максимального значения. Будем считать, что в этот же момент времени начинается размыкание цепи. Тогда для токов можно записать уравнения Кирхгофа:

$$\begin{cases} J_L = J_R + J_S \\ L\dot{J}_L + J_R R = 0 \end{cases} \quad (6.27)$$

Продифференцируем первое уравнение и, учитывая второе, получим

$$\dot{J}_R + \frac{R}{L} J_R = -\dot{J}_S. \quad (6.28)$$

Предположим, что свойства размыкателя таковы, что ток через него описывается выражением

$$J_S = J_0 e^{-t/\tau_S}, \quad (6.29)$$

где J_0 – ток непосредственно перед началом процесса размыкания или при $t=0$. Тогда вместо (6.28) можно записать

$$\dot{J}_R + \frac{R}{L} J_R = \frac{1}{\tau_S} J_0 e^{-t/\tau_S}. \quad (6.30)$$

Решение (6.30) будем искать методом вариации постоянной. Пусть решение (6.30) есть:

$$J_R = J(t) e^{-t/\tau_L}, \quad (6.31)$$

где $\tau_L = L/R$. Тогда подставляя (6.31) в (6.30), можно получить уравнение

$$\dot{J}(t) = \frac{1}{\tau_S} J_0 e^{-t \left(\frac{1}{\tau_S} - \frac{1}{\tau_L} \right)}. \quad (6.32)$$

Решение последнего уравнения позволяет определить ток через активное сопротивление. Поскольку $J_R(0) = 0$, то

$$J_R = \frac{\tau_L}{\tau_S - \tau_L} J_0 \left(e^{-t/\tau_S} - e^{-t/\tau_L} \right). \quad (6.33)$$

Проанализируем полученное решение (Рис.6.8).

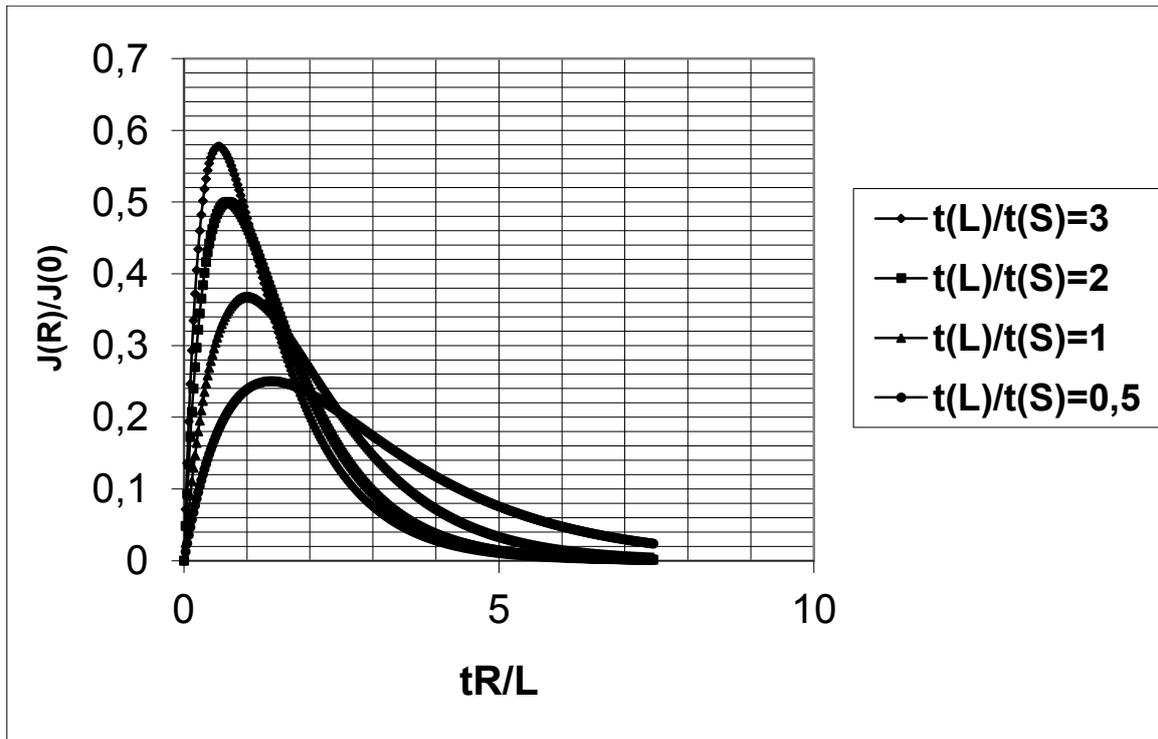


Рис.6.8.

Случай 1. Пусть время вывода энергии мало по сравнению со временем размыкания или $\tau_S \gg \tau_L = L/R$.

При $t \leq \tau_L$:
$$J_R \approx \frac{\tau_L}{\tau_S} J_0 \left(1 - e^{-t/\tau_L} \right) \quad (6.34)$$

При $t \gg \tau_L$:
$$J_R \approx \frac{\tau_L}{\tau_S} J_0 e^{-t/\tau_S}. \quad (6.35)$$

В этом случае амплитуда тока в активном сопротивлении мала

$$J_R^{max} \approx \frac{\tau_L}{\tau_S} J_0,$$

а напряжение на активном сопротивлении

$$U_R^{max} \approx \frac{\tau_L}{\tau_S} J_0 R \ll J_0 R.$$

Это связано с тем, что большая часть тока остается в размыкателе.

Случай 2. Пусть теперь время вывода энергии велико по сравнению с временем размыкания или $\tau_S \ll \tau_L = L/R$.

$$\text{При } t \leq \tau_S: \quad J_R \approx J_0 \left(1 - e^{-t/\tau_S}\right). \quad (6.36)$$

Нарастание тока в активном сопротивлении связано с перебрасыванием тока из размыкателя, которое происходит за время τ_S .

$$\text{При } t \gg \tau_S: \quad J_R \approx J_0 e^{-t/\tau_L}. \quad (6.37)$$

В течение времени τ_L происходит рассеяние энергии в активном сопротивлении. В этом случае:

$$J_R^{max} \approx J_0, \quad U_R^{max} \approx J_0 R = \frac{R}{\rho} U_0 \gg U_0.$$

Эти результаты, как оценки, можно получить и непосредственно из уравнений (6.27).

Действительно, при $\tau_S \gg \tau_L$ характерное время изменения тока через индуктивность есть τ_S . Действительно, $\tau_S \approx L/R_S$, где R_S – эффективное сопротивление ключа. Поэтому в рассматриваемом случае $R_S \ll R$, а сопротивление контура и, следовательно, время изменения тока через индуктивность определяется сопротивлением ключа.

$$U_R = J_R R \approx L \frac{dJ}{dt} \approx L \frac{J_0}{\tau_S} \approx J_0 R \frac{L}{R \tau_S} = J_0 R \frac{\tau_L}{\tau_S} \ll J_0 R. \quad (6.38)$$

При $\tau_S \ll \tau_L = L/R$ изменение тока во времени определяется величиной τ_L . Поскольку в этом случае $R_S \gg R$. Поэтому

$$U_R \approx J_R R \approx L \frac{dJ}{dt} \approx L \frac{J_0}{\tau_L} \approx J_0 R \quad (6.39)$$

Энергия, которая выделяется в активном сопротивлении

$$W_R = \int_0^{\infty} J_R^2 R dt = L \frac{J_0^2}{2} \frac{\tau_L}{\tau_L + \tau_S}. \quad (6.40)$$

Таким образом, эффективность передачи энергии из индуктивного накопителя в нагрузку

$$\eta \approx \begin{cases} 1 & \text{при } \tau_S \ll \tau_L \\ 0,5 & \text{при } \tau_S \approx \tau_L \\ \frac{\tau_L}{\tau_S} & \text{при } \tau_S \gg \tau_L \end{cases} . \quad (6.41)$$

7. Методы повышения напряжения

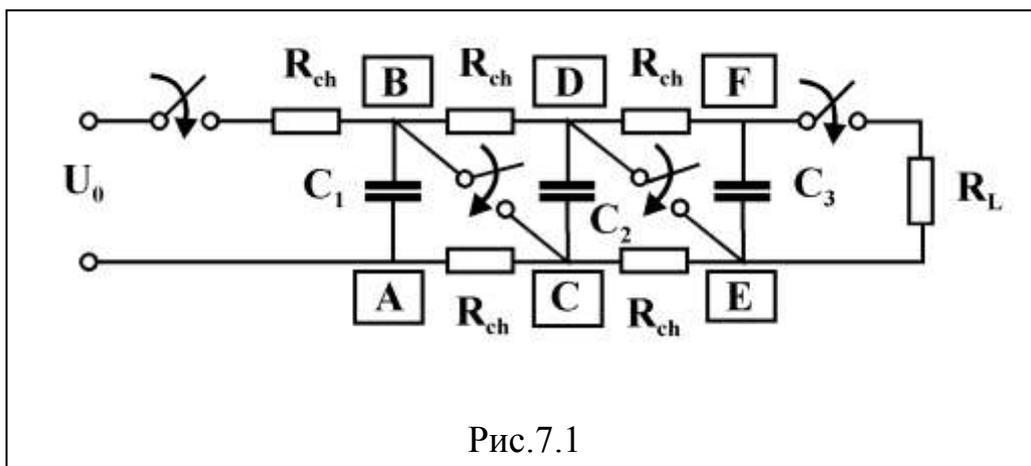
7.1. Генераторы с умножением напряжения.

Генератор Маркса

Идея генераторов Маркса (рис.7.1) достаточно проста. С помощью внешнего источника заряжается емкостный накопитель энергии, состоящий из набора параллельно включенных конденсаторов, до напряжения U_0 . Затем посредством коммутаторов, в качестве которых обычно используются искровые разрядники, конденсаторы включаются последовательно и подключаются к нагрузке. Таким образом, выходное напряжение генератора становится равным

$$U_R = nU_0 \quad (7.1)$$

где n – количество последовательно соединенных ступеней генератора.



Полная запасаемая энергия генератора

$$W_g = n \frac{cU_0^2}{2} = \frac{(c/n)(nU_0)^2}{2} = \frac{c_{out}U_R^2}{2} \quad (7.2)$$

где $c_{out} = c/n$ – емкость последовательно соединенных ступеней генератора. Высоковольтные генераторы, основанные на этой схеме, были предложены Эрвином Марксом (Германия) в 1925 году. Аналогичные идеи в России в 20-ых годах развивались Аркадьевым.

На рис.7.1 приведена упрощенная схема трехступенчатого генератора Маркса.

К окончанию зарядки накопителя, когда зарядный ток $J_{ch} \ll U_0 / R_{ch}$, где R_{ch} - зарядное сопротивление, потенциалы $U_B \approx U_D \approx U_F \approx U_0$, а $U_A \approx U_C \approx U_E \approx 0$.

При срабатывании коммутатора между первой и второй ступенями генератора Маркса имеет место достаточно быстрый переходной процесс в разветвленной цепи $\boxed{A-B-D-E-A}$, включающей в реальности собственные индуктивности контуров, межэлектродную емкость второго разрядника, паразитные емкости. Характер этих паразитных емкостей – емкость электродных систем «на землю». Задача состоит в оптимизации величины паразитных емкостей, с тем, чтобы обеспечить минимальную длительность переходного процесса, а после окончания их зарядки выполнение $U_C \approx U_0$, $\boxed{U_D = 2U_0}$, $U_E = 0$.

Поскольку разность потенциалов в точках D и E есть $2U_0$, то при внешнем запуске первого коммутатора второй ключ может срабатывать в режиме самопробоя, вследствие двукратного увеличения напряжения по сравнению с начальным. Увеличение напряжения на разряднике при срабатывании предыдущего разрядника, таким образом, автоматически синхронизирует работу коммутаторов генератора Маркса.

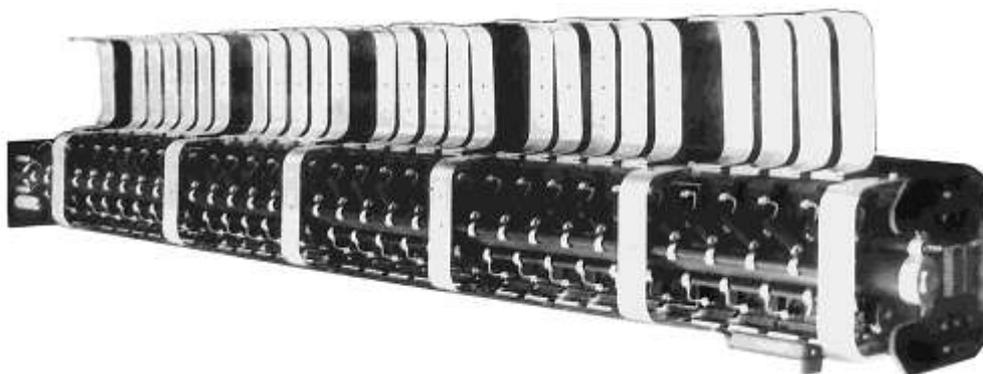


Рис.7.2.

На рис.7.2 показан общий вид 33-х каскадной секции по схеме Маркса, используемой в импульсном генераторе «Гамма» (Томск, ИСЭ СО РАН) - всего 22 секции параллельно. Данные этой импульсной системы приведены в таблице.

емкость	12 нФ
зарядное напряжение U_0	25÷85 кВ
запасаемая энергия при $U_0 = 85$ кВ	47,5 кДж
выходное напряжение при $U_0 = 85$ кВ	2,8 МВ
удельная плотность энергии при $U_0 = 85$ кВ	19 кДж/м ³
линейный градиент при $U_0 = 85$ кВ	0,5 МВ/м

Ниже приводятся данные других импульсных энергетических установок, созданных в своё время на основе генераторов Маркса.

PBFA-II, Sandia National Labs, США (1985 г.). Предназначен для исследований в области управляемого инерциального синтеза. Нагрузка - ионный пучок. 36 генераторов Маркса, работающих параллельно. Зарядное напряжение 95 кВ. Энергия, запасаемая в одном генераторе, 360 кДж. Полная запасаемая энергия 13 МДж. Выходное напряжение 5,6 МВ. Время зарядки 100 с. Время вывода энергии из генераторов Маркса около 1 мкс. Выходное напряжение **PBFA-II** 12 МВ, ток 8 МА, длительность импульса 20 нс, мощность 100 ТВт.

Saturn, Sandia National Labs, США (1987 г.). Источник мощного импульсного рентгеновского излучения. 36 генераторов Маркса, работающих параллельно. В одном генераторе Маркса 32 конденсатора с емкостью 1,35 мкФ. Зарядное напряжение 85 кВ. Запасаемая энергия 150 кДж. Выходное напряжение **Saturn**, 2.7 МВ, ток 12,5 МА, длительность импульса 40 нс, мощность 25 ТВт

Генераторы Маркса могут работать как непосредственно на нагрузку (Гамма), так и являться первичным или промежуточным (РВФА-И) накопителем энергии.

Генератор Фитча

Генератор Фитча представляет LC - генератор, где последовательное включение емкостей осуществляется при переполяривании напряжения на четных каскадах в колебательных LC - контурах. В исходном состоянии емкости заряжены от источника постоянного напряжения, как и в схеме генератора Маркса.

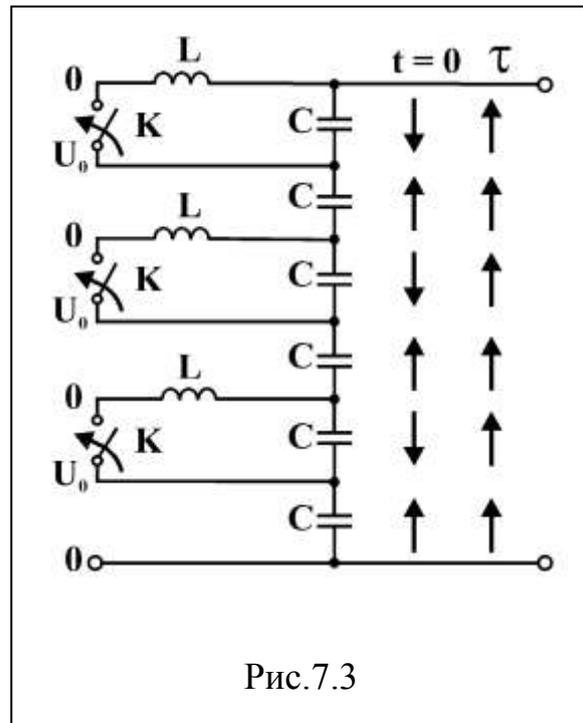
В момент $t = 0$ четные емкости при замыкании ключей начинают разряжаться через индуктивности L .

Через промежуток времени $\tau = \pi\sqrt{LC}$ напряжение на них меняет знак, и на выходе генератора получается $U_{\text{вых}} = NU_0$, где N – число каскадов. При отсутствии нагрузки напряжение на выходе изменяется по закону

$$U_{\text{вых}} = NU_0(1 - e^{-\alpha t} \cos \omega t), \quad (7.3)$$

где $\omega^2 = 1/LC$, $\alpha = R/2L$, R – сопротивление LC-контура. Из (7.3) видно, что время нарастания напряжения, в отличие от генератора Маркса, определяется специально включаемой индуктивностью, а с уменьшением L может уменьшиться коэффициент умножения напряжения из-за увеличения параметра α .

По сравнению с генератором Маркса схема Фитча имеет преимущество. В ней уменьшено вдвое количество коммутаторов. Однако



их нужно включать по возможности одновременно, используя специальные схемы запуска. Другое преимущество – сопротивления разрядников и их индуктивности не влияют на выходной импеданс схемы. Это реализуется, если LC - генератор включать на нагрузку через дополнительный быстрый коммутатор, который, однако, должен иметь внешний запуск для включения точно в момент максимума суммарного напряжения в каскаде.

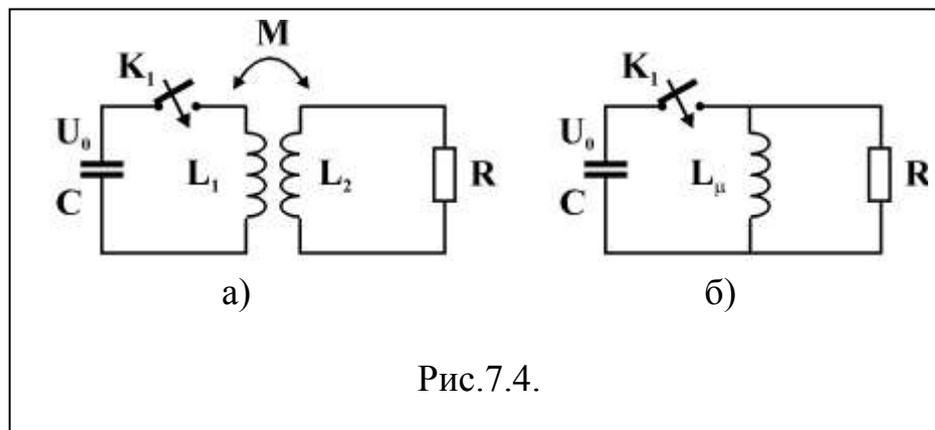
7.2. Трансформаторные системы

Импульсные трансформаторы с сосредоточенными параметрами широко применяются в качестве зарядных устройств для емкостных накопителей: сосредоточенных емкостей-конденсаторов и формирующих линий. Как правило, трансформаторы работают в микросекундном диапазоне времени. Выбор этого временного диапазона обусловлен двумя факторами. С одной стороны, имеются ограничения высокочастотных свойств ферромагнитных сердечников, хотя понятно, что для более надежной работы электрической изоляции элементов импульсных генераторов необходимо иметь длительность зарядных импульсов как можно короче. С другой стороны, длительность зарядного импульса должна быть достаточно большой, чтобы завершились все переходные процессы в зарядном контуре и накопительном элементе, и чтобы надежно и в нужный момент времени сработал коммутатор, подключающий накопитель к нагрузке. Микросекундный диапазон является в этих отношениях оптимальным.

Обычно используются традиционные импульсные трансформаторы (1), трансформаторы Тесла (2), линейные трансформаторы (3) и их модификации. Трансформаторные схемы компактны, надежны и могут работать в импульсно-периодическом режиме.

Импульсный трансформатор

Для получения импульсов высокого напряжения могут быть использованы обычные импульсные трансформаторы. Рассмотрим схему, приведенную на рис.7.4,а.



Если коэффициент связи контуров близок к единице, то напряжение на нагрузке после включения коммутатора будет

$$U_R \approx nU_0, \quad (7.4)$$

где U_0 – зарядное напряжение первичного емкостного накопителя, а длительность импульса на нагрузке

$$\tau_R \approx RC/n^2. \quad (7.5)$$

Оценим величину сечения замкнутого магнитопровода, необходимого для работы импульсного трансформатора. При большом коэффициенте связи и активной нагрузке можно пренебречь влиянием индуктивности рассеяния на значение тока намагничивания. По этой причине на приведённой схеме (рис.7.4,б) индуктивности рассеяния не показана. Тогда

$$L_\mu \frac{dJ_\mu}{dt} = U_0 e^{-t/RC}. \quad (7.6)$$

Откуда

$$J_{\mu} = \frac{U_0}{L_{\mu}} (RC/n^2) (1 - e^{-tn^2/RC}). \quad (7.7)$$

Магнитный поток в сердечнике

$$\Phi N_1 = L_{\mu} J_{\mu}, \quad (7.8)$$

где N_1 - количество витков в первичной обмотке.

Таким образом, для того, чтобы сердечник не находился в состоянии насыщения к окончанию импульса, необходимо:

$$S > \frac{U_0 (RC/n^2)}{\Delta B_{max} N_1} = \frac{U_0 \tau_p}{\Delta B_{max} N_1}. \quad (7.8)$$

Для увеличения энергии в импульсе и облегчения работы коммутатора первичного контура трансформатора возможно параллельное включение первичных накопителей.

Импульсные трансформаторы широко используются в качестве высоковольтных развязывающих элементов, для формирования управляющих импульсов, для питания термокатодных электронных пушек вакуумных электронных СВЧ приборов и радиоламп, и т.п.

Трансформатор Тесла

Трансформатор Тесла есть система двух индуктивно связанных контуров и равными собственными частотами, работающая в режиме свободных колебаний.

Схема трансформатора Тесла показана на рис.7.5. Будем считать, что начальные условия записываются как:

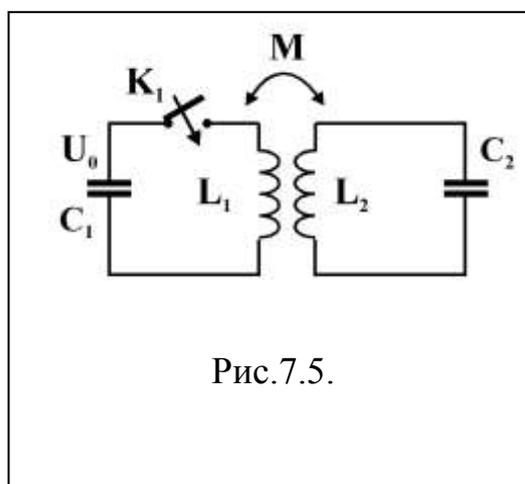


Рис.7.5.

$$\begin{aligned}
U_{C1}(0) &= U_0 \\
U_{C2}(0) &= 0 \\
J_1(0) &= J_2(0) = 0
\end{aligned}
\tag{7.9}$$

Процессы в связанных контурах описываются системой уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{1}{C_1} \int J_1 dt + L_1 \frac{dJ_1}{dt} &= M \frac{dJ_2}{dt} \\
\frac{1}{C_2} \int J_2 dt + L_2 \frac{dJ_2}{dt} &= M \frac{dJ_1}{dt}
\end{aligned}
\tag{7.10}$$

Отметим, что знак перед M в данном случае не имеет значения и зависит от направления обхода контуров. Пусть контура имеют одинаковые собственные частоты, или

$$\begin{aligned}
\omega_1 &= \omega_2 = \omega_0 \\
L_1 C_1 &= L_2 C_2
\end{aligned}
\tag{7.11}$$

Учтем также, что

$$\frac{M}{L_1} = k \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} ; \quad \frac{M}{L_2} = k \sqrt{\frac{L_1}{L_2}}
\tag{7.12}$$

Тогда (7.10) принимает вид:

$$\begin{aligned}
\ddot{J}_1 + \omega_0^2 J_1 &= k \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \ddot{J}_2 \\
\ddot{J}_2 + \omega_0^2 J_2 &= k \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \ddot{J}_1
\end{aligned}
\tag{7.13}$$

Решение (7.13) будем искать в виде:

$$J_1(t) = \sum_{j=1}^4 A_j e^{i\omega_j t} ; \quad J_2(t) = \sum_{j=1}^4 B_j e^{i\omega_j t}
\tag{7.14}$$

Подставляя (7.14) в систему уравнений и приравнивая коэффициенты при одинаковых экспонентах, получаем

$$\begin{aligned}
 A_j(\omega_0^2 - \omega_j^2) + B_j k \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \omega_j^2 &= 0 \\
 A_j k \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \omega_j^2 + B_j(\omega_0^2 - \omega_j^2) &= 0
 \end{aligned}
 \tag{7.15}$$

Нетривиальное решение (7.15) существует, если детерминант (7.15) равен нулю, или, если ω_j есть корни характеристического уравнения

$$(\omega_0^2 - \omega_j^2)^2 = k^2 \omega_j^4.
 \tag{7.16}$$

Откуда

$$\omega_j = \pm \frac{\omega_0}{\sqrt{1 \pm k}}.
 \tag{7.17}$$

Поскольку $k^2 < 1$, то все 4 решения (7.16) действительны и имеют попарно противоположные знаки. Из (7.15) следует, что

$$B_j = \pm \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} A_j,
 \tag{7.18}$$

причем знак в (7.18) совпадает со знаком перед коэффициентом связи в выражении для собственных частот

$$\omega_{1,2} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 \pm k}}.
 \tag{7.19}$$

Поскольку при $t = 0$ токи в контурах отсутствуют, то

$$\begin{aligned}
 A_1 + A_2 + A_3 + A_4 &= 0 \\
 A_1 + A_2 - A_3 - A_4 &= 0
 \end{aligned}
 \tag{7.20}$$

Здесь A_1, A_2 коэффициенты пред $\exp(\pm \omega_1 t)$, A_3, A_4 коэффициенты пред $\exp(\pm \omega_2 t)$, Откуда следует, что $A_1 = -A_2$; $A_3 = -A_4$.

Таким образом, переобозначая константы, решения можно представить в виде:

$$\begin{aligned}
 J_1(t) &= A_1 \sin \omega_1 t + A_2 \sin \omega_2 t \\
 J_2(t) &= -A_1 \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \sin \omega_1 t + A_2 \sqrt{\frac{L_1}{L_2}} \sin \omega_2 t
 \end{aligned}
 \tag{7.21}$$

Учтем, что $U_{C2}(0)=0$, а $U_{C1}(0)=U_0$. В данном случае, согласно (7.10), $U_{C2}(t)$ и $U_{C1}(t)$ могут содержать только гармонические функции. Тогда нетрудно получить:

$$\begin{aligned} A_2 &= A_1 \frac{\omega_2}{\omega_1} \\ A_1 &= -\frac{1}{2} U_0 C_1 \omega_1 \end{aligned} \quad (7.22)$$

Таким образом, решение задачи можно представить в виде:

$$\begin{aligned} J_1(t) &= -\frac{1}{2} U_0 C_1 \omega_1 \left(\sin \omega_1 t + \frac{\omega_2}{\omega_1} \sin \omega_2 t \right) \\ J_2(t) &= \frac{1}{2} U_0 \frac{C_1 \omega_1}{\sqrt{L_2/L_1}} \left(\sin \omega_1 t - \frac{\omega_2}{\omega_1} \sin \omega_2 t \right) . \\ U_{C1}(t) &= \frac{1}{2} U_0 (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) \\ U_{C2}(t) &= -\frac{1}{2} U_0 \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} (\cos \omega_1 t - \cos \omega_2 t) \end{aligned} \quad (7.23)$$

Здесь учтено, что при равенстве собственных частот контуров $C_1/C_2 = L_2/L_1$.

Исследуем полученное решение. Как видно, максимальное значение напряжения на емкости вторичного контура $U_{C2}^{max} = U_0 \sqrt{L_2/L_1} \approx nU_0$ возможно лишь при выполнении дополнительных условий, когда комбинация тригонометрических функций принимает значение 2. Определим эти условия. Запишем $U_{C2}(t)$ в виде

$$U_{C2}(t) = U_0 \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} \sin t \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \sin t \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} . \quad (7.24)$$

Отсюда видно, что $U_{C2}^{max} = nU_0$, если одновременно выполняются следующие условия

$$\begin{cases} (\omega_1 - \omega_2)t = \pi + 2\pi l \\ (\omega_1 + \omega_2)t = \pi + 2\pi m \end{cases}, \quad (7.25)$$

где l, m - целые числа. Пусть, например $l = 0$, тогда

$$\begin{cases} (\omega_1 - \omega_2)\tau_c = \pi \\ (\omega_1 + \omega_2)\tau_c = \pi + 2\pi m = p\pi \end{cases}. \quad (7.26)$$

где p – целое нечетное число, а

$$\frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_1 - \omega_2} = p \quad (7.27)$$

Учитывая (7.19), из (7.27) можно получить

$$k_{opt} = \frac{2p}{p^2 + 1}. \quad (7.28)$$

При $p = 1; 3; 5 \dots$ $k_{opt} = 1; 0,6; 0,385 \dots$, соответственно.

Коэффициент передачи энергии из C_1 в C_2 при перечисленных выше условиях есть

$$\eta = \frac{C_2 U_2^{max}}{C_1 U_0} = \frac{C_2 L_2}{C_1 L_1} = 1 \quad (7.29)$$

Зависимости напряжения на конденсаторе вторичного контура приведены ниже на графиках (рис.7.6 и рис.7.7).

Как видно из представленных графиков, $k_{opt} = 0,6; 0,385$ отличаются тем, что максимальное напряжение на конденсаторе C_2 достигается после одно- и двукратного достижения локальных максимумов, соответственно. То есть, напряжение на высоковольтном конденсаторе носит осциллирующий характер, что может вызывать проблемы прочности изоляции. Разумеется, с этой точки зрения несомненным преимуществом обладает вариант с $k_{opt} = 1$, когда максимум напряжения будет достигаться в режиме однополярного зарядного процесса.

Случай $p=3$. Тогда $U_{C2} \propto \sin\left(\frac{\pi t}{2 \tau_c}\right) \sin\left(\frac{3\pi t}{2 \tau_c}\right)$, где $\tau_c = \frac{\pi}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{3\pi}{\omega_1 + \omega_2}$

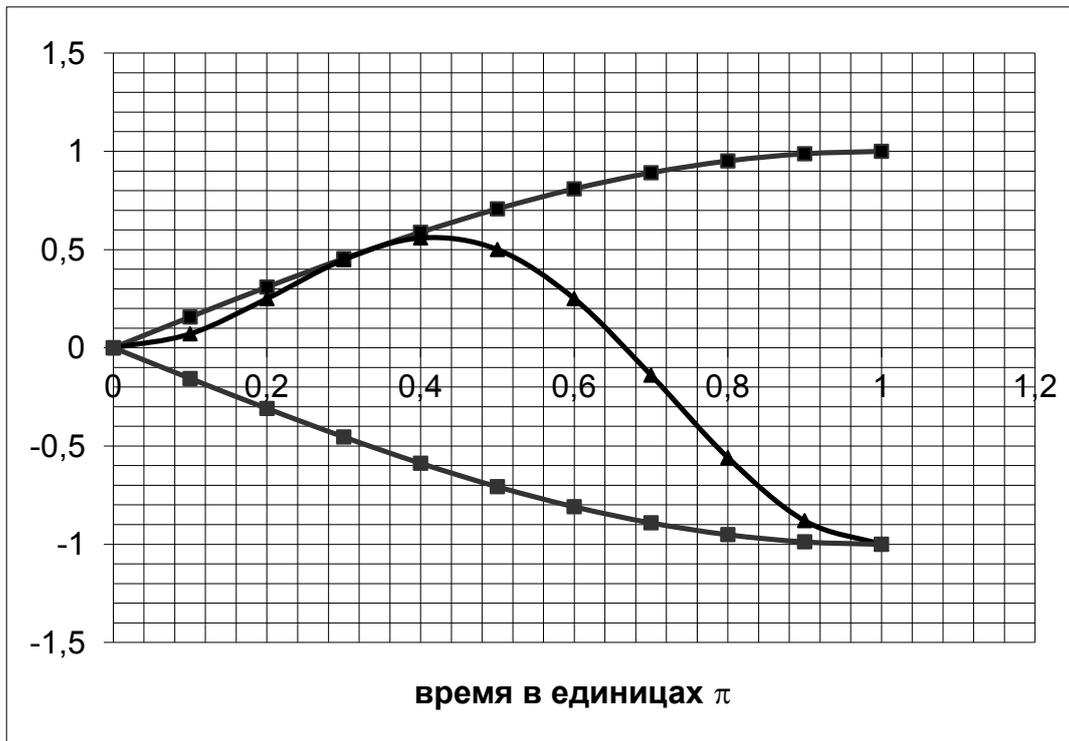


Рис.7.6

Случай $p=5$. Тогда $U_{C2} \propto \sin\left(\frac{\pi t}{2 t_0}\right) \sin\left(\frac{5\pi t}{2 t_0}\right)$, где $t_0 = \frac{\pi}{\omega_1 - \omega_2} = \frac{5\pi}{\omega_1 + \omega_2}$

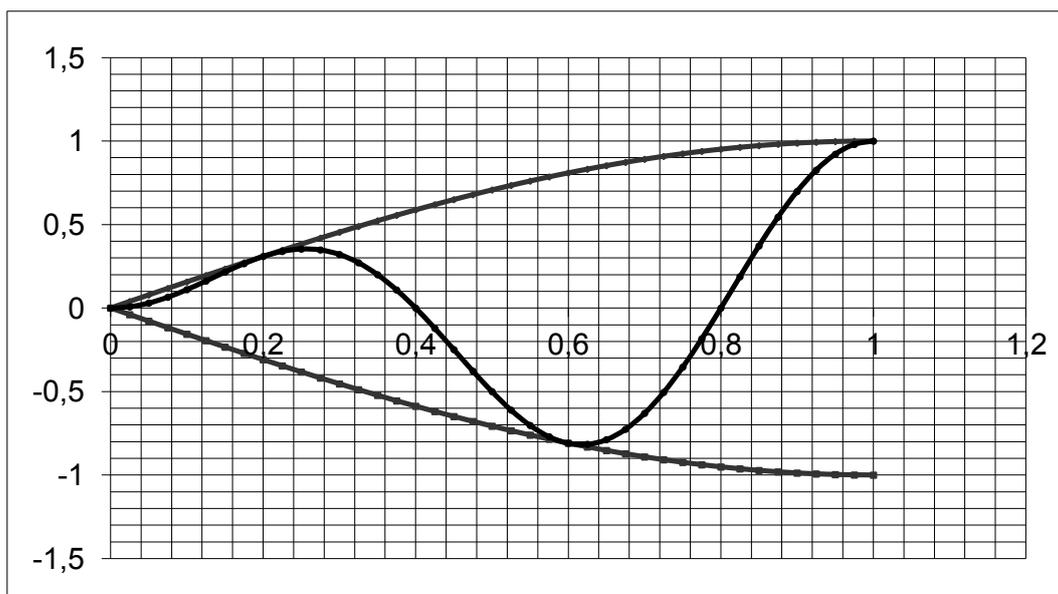


Рис.7.7

Значение $k_{opt} = 1$ обеспечивается, например, в том случае, когда сердечник трансформатора замкнут. Здесь, однако, возникают проблемы прочности изоляции обмотки «на корпус». Вместе с тем, существует достаточно хорошо отработанный вариант высоковольтного контура трансформатора Тесла с коаксиальной емкостью C_2 в виде длинной линии. При этом используется разомкнутый магнитопровод, совмещённый с проводниками линии. Он обеспечивает $k_{opt} \approx 1$, если обмотки встроены в изоляционный зазор линии (рис.7.8) на участке, равном половине её длины, а радиальный размер магнитопровода существенно меньше линейной длины всей системы.

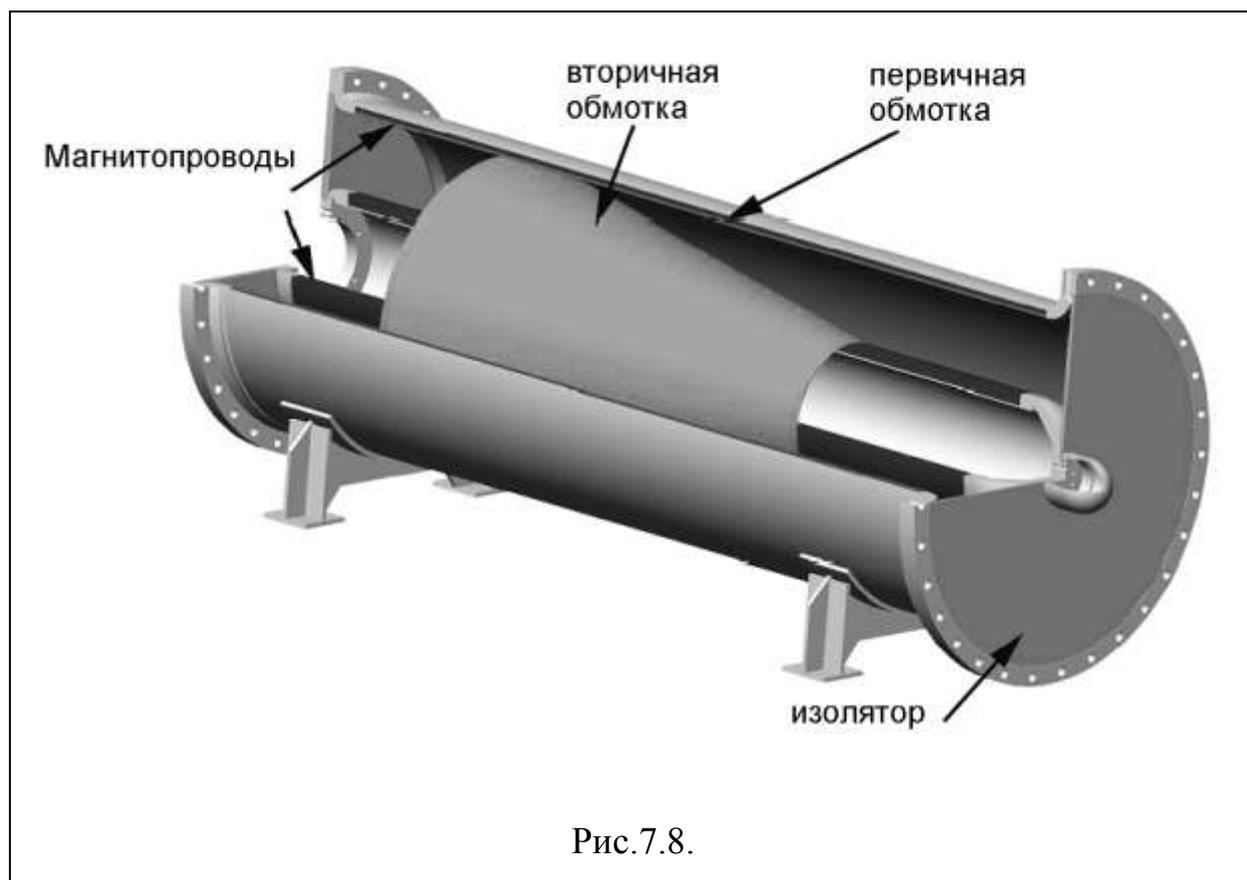


Рис.7.8.

Линейный трансформатор

Как отмечалось, одна из проблем, которая возникает при использовании импульсного трансформатора для получения мощных высоковольтных импульсов, связана с его электрической прочностью, а именно, - электрической прочностью его вторичной катушки. Для решения этой проблемы перспективным оказывается использование линейного трансформатора, схема которого приведена на рис.7.9.

В отличие от обычного секционированного импульсного трансформатора число витков вторичного контура в каждой секции линейного

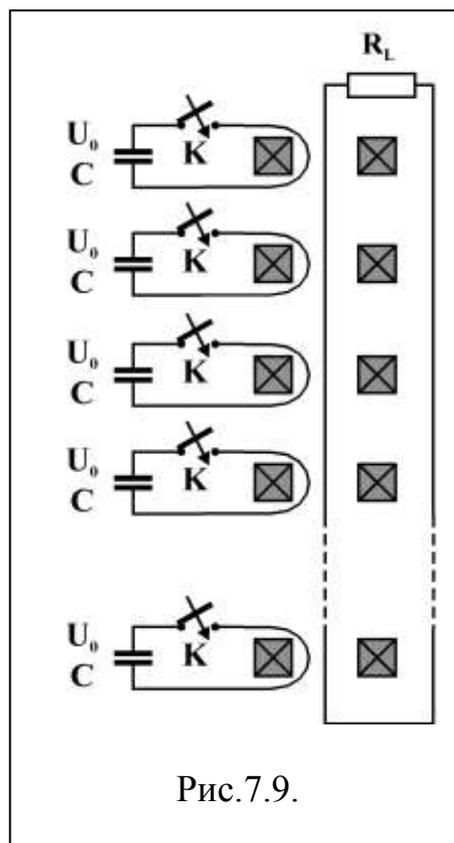


Рис.7.9.

трансформатора $N_2 = 1$. Поэтому полный коэффициент трансформации линейного трансформатора $U_R \approx nNU_0$.

где N – число секций, а n – коэффициент трансформации одной секции.

Если коэффициент трансформации секции равен единице, то полный коэффициент трансформации линейного трансформатора равен числу его секций. Область, в которой существует высокое электрическое поле, изолирована от первичного контура трансформатора. Распределение напряжения вдоль трансформатора является линейно нарастающим.

Линейный трансформатор может использоваться не только как генератор напряжения, но и как генератор тока.

8. Волны в передающих линиях

8.1. Волновое уравнение

До сих пор рассматривались относительно медленные процессы. В этих процессах не учитывалось возможное запаздывание передачи энергии из одной точки пространства в другую. Известно, что передача энергии в пространстве происходит с конечной скоростью, со скоростью света в данной среде. Если расстояние между двумя точками l , а рассматриваемые электромагнитные процессы имеют характерный временной масштаб $T \gg \tau \approx l/c$, где l – характерный размер системы, то запаздыванием распространения электрических сигналов можно пренебречь. Если же $T \leq l/c$, то необходимо учитывать конечное время распространения сигналов. В частности, если $l \approx 10^2$ см, то для вакуума $\tau \approx 3$ нс.

Приведенный пример говорит о том, что при получении импульсов высокого напряжения большой мощности за счет ступенчатой время-амплитудной компрессии при переходе в наносекундный диапазон становятся существенными процессы конечной скорости распространения сигналов в накопительных элементах и передающих трактах при коммутации на нагрузку.

В однородной среде без дисперсии с постоянными ε и μ в отсутствие внешних зарядов и токов связь между электрическими и магнитными полями описывается системой уравнений Максвелла.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{E} &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{H} &= 0 \\ \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\mu}{c} \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{\varepsilon}{c} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{aligned} \quad (8.1)$$

Исключая магнитное поле из этих уравнений, получим

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\mu}{c} \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (8.2)$$

и, поскольку $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{E} - \Delta \vec{E}$, мы приходим к волновому уравнению

$$\Delta \vec{E} - \frac{\varepsilon \mu}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (8.3)$$

Отсюда видно, что электромагнитные возмущения распространяются в среде в виде волн, причем в однородной среде с постоянными ε и μ скорость распространения электромагнитных волн есть $c/\sqrt{\varepsilon\mu}$.

Для монохроматических процессов, когда поля зависят от времени как $e^{i\omega t}$, волновое уравнение можно представить в виде

$$\Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = 0, \quad (8.4)$$

где волновое число $k = \omega\sqrt{\varepsilon\mu}/c$.

8.2. Канализация волн.

Дисперсионные типы волн

Для направленного распространения (или канализации) волн используются, так называемые, передающие линии. Передающая линия представляет собой систему проводников, имеющую выделенное направление, вдоль которого могут распространяться электромагнитные волны. Пусть, например, это направление совпадает с осью z . Тогда поле волны для однородной передающей линии можно записать в виде

$$\vec{E}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}_\perp) f(t, z), \quad (8.5)$$

где для монохроматических процессов $f(t, z) = e^{i(\omega t - hz)}$, h – продольное волновое число, характеризующее пространственный период изменения поля вдоль оси z при заданном значении частоты.

Рассмотрим волновое уравнение в передающей линии для z -компоненты поля, тогда

$$\Delta(E_z(\vec{r}_\perp))f(z, t) + k^2 E_z f(z, t) = 0. \quad (8.6)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \Delta(E_z(\vec{r}_\perp))f(z, t) &= f\Delta_\perp E_z + E_z\Delta f + 2(\nabla E_z, \nabla f) \\ \Delta f(z, t) &= -h^2 f(z, t) \quad , \\ \nabla E_z &\perp \nabla f \end{aligned}$$

то трехмерное волновое уравнение сводится к двумерному уравнению

$$\begin{aligned} \Delta_\perp E_z + k_\perp^2 E_z &= 0 \\ k_\perp^2 &= k^2 - h^2 \quad , \end{aligned} \quad (8.7)$$

которое должно решаться с некоторыми граничными условиями на поверхности волноведущей системы. В частности, на поверхности металла с идеальной проводимостью $E_z|_\Gamma = 0$. Аналогичное уравнение можно получить и для магнитного поля H_z , которое должно решаться с граничным условием $\partial H_z / \partial n|_\Gamma = 0$, которое обеспечивает выполнение условия $\vec{H}_n|_\Gamma = 0$. Полученное уравнение носит название уравнения Гемгольца и обычно записывается относительно мембранной функции $\Psi(r_\perp)$:

$$\begin{aligned} \Delta_\perp \Psi + k_\perp^2 \Psi &= 0 \\ \Psi|_\Gamma &= 0 \quad . \\ \frac{\partial \Psi}{\partial n}|_\Gamma &= 0 \end{aligned} \quad (8.8)$$

Для однородных граничных условий, таким образом, в волноведущей системе могут существовать волны, в которых отлична от нуля продольная компонента либо электрического, либо магнитного поля. Волна, в которой $E_z \neq 0$, $H_z = 0$ называется волной электрического типа, **волной E-типа, или ТМ-волной** (transverse magnetic wave). Волна, в которой $H_z \neq 0$, $E_z = 0$ называется волной магнитного типа, **волной H-типа, или ТЕ-волной** (transverse electric wave).

Задача (8.8) имеет решения при вполне определенных собственных значениях параметра $k_{\perp}^2 = k_{\perp mn}^2$. Причем каждому собственному значению $k_{\perp mn}$ соответствует собственная мембранная функция $\Psi_{mn}(r_{\perp})$. Определенный набор чисел (m, n) задает тип волны или моду. Как это следует из определения k_{\perp}^2 , каждый тип волны обладает собственной зависимостью $\omega(h)$ или $h(\omega)$:

$$k^2 = h^2 + k_{\perp mn}^2, \quad (8.9)$$

или

$$\omega^2 = h^2 c^2 + k_{\perp mn}^2 c^2,$$

которая называется **дисперсионной зависимостью**. В (8.9) k_{\perp} имеет смысл поперечного волнового числа. При $\omega < \omega_{cr} = k_{\perp mn} c$ распространение рассматриваемых типов волн в передающей линии невозможно. Частота ω_{cr} называется критической частотой.

Главная волна

В наборе собственных чисел при решении задачи (8.8) минимальное значение $k_{\perp mn} > 0$. Минимальное значение поперечного волнового числа определяется поперечным размером передающей линии, $k_{\perp}^{min} \approx 1/l_{\perp}$,

откуда минимальная частота волны, которая может распространяться в передающей линии $\omega^{min} \approx c/l_{\perp}$. Если $k_{\perp} = 0$, то согласно дисперсионному уравнению $h = k$. Таким образом, при данном условии волна является чисто поперечной. Действительно, уравнение Гемгольца для таких волн имеет вид:

$$\Delta_{\perp} \Psi = 0. \quad (8.10)$$

При граничном условии $\Psi|_{\Gamma} = 0$, независимо от формы сечения линии, единственное решение (8.10) есть $\Psi = 0$. При граничном условии $\partial \Psi / \partial n|_{\Gamma} = 0$ решение (8.10) $\Psi = const$. Эта константа для $\Psi = H_z$, однако, может быть только нулем. Действительно, проинтегрировав уравнение

$$div \vec{H} = \frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} + ikH_z = 0 \quad (8.11)$$

по площади поперечного сечения, получаем

$$\oint H_n dl + ik \int H_z df = 0. \quad (8.12)$$

Ввиду равенства $H_n = 0$ на контуре сечения и постоянства H_z по его площади следует, что $H_z = 0$. Таким образом, при $h = k$, продольные компоненты полей равны нулю. Отсюда следует, что при $h = k$ в линии передач может существовать только поперечная волна.

Как уже отмечалось, для поперечной волны закон дисперсии имеет вид

$$\omega = kc / \sqrt{\epsilon \mu} \quad (8.13)$$

Поскольку в поперечной волне продольные компоненты поля отсутствуют, то

$$rot \vec{E}_{\perp} = -i \frac{\omega}{c} \mu \vec{H}_{\perp}, \quad (8.14)$$

Откуда

$$\begin{aligned}(\operatorname{rot} \vec{E}_{\perp})_x &= -\bar{x}_0 \frac{\partial E_y}{\partial z}, \\(\operatorname{rot} \vec{E}_{\perp})_y &= \bar{y}_0 \frac{\partial E_x}{\partial z}.\end{aligned}\quad (8.15)$$

Учитывая, что $\frac{\partial}{\partial z} = -ik$, получаем:

$$E_y = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_x, \quad E_x = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} H_y \Rightarrow \vec{H}_{\perp} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} [\vec{z}_0 \vec{E}_{\perp}]. \quad (8.16)$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}(\operatorname{rot} \vec{E}_{\perp})_z &= \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = 0 \\ \operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} = 0\end{aligned}\quad (8.17)$$

Таким образом, для поперечной волны $(\operatorname{rot} \vec{E}_{\perp})_z = 0$, поэтому поперечное поле можно представить в виде $\vec{E}_{\perp} = -\nabla \varphi$, а поскольку $\operatorname{div} \vec{E} = 0$, то распределение поле в линии может быть найдено из решения уравнения Лапласа

$$\begin{aligned}\Delta \varphi &= 0 \\ \varphi|_{\Gamma} &= \varphi_0 = \text{const}\end{aligned}\quad (8.18)$$

Для линий с односвязной формой сечения единственное решение этого уравнения $\varphi = \varphi_0$ или $\vec{E}_{\perp} = 0$. Отсюда следует невозможность распространения поперечной волны в линиях с односвязной формой сечения, или для таких линий $k_{\perp mn}^{\min} > 0$, то. Значит, здесь возможны только дисперсионные волны TE и TM. В линиях с многосвязной формой сечения граничные условия меняют свой вид. Поэтому возможно распространение еще одного типа волны, который называется главной

волной или ТЕМ-волной. Для таких линий поперечное распределение электрического поля является решением электростатической задачи при заданных потенциалах на проводниках линии.

Предположим, что найдено распределение электрического поля для главной волны, как решение электростатической задачи. Тогда для монохроматических колебаний средняя по времени энергия электрического поля волны на единицу длины линии

$$\bar{W}_E = \int \varepsilon \frac{|\vec{E}|^2}{16\pi} dS = C_0 \frac{\varphi_0^2}{4}, \quad (8.19)$$

где C_0 - емкость единицы длины линии, φ_0 - амплитуда потенциала проводника. Средняя по времени энергия магнитного поля на единицу длины линии есть

$$\bar{W}_H = \int \mu \frac{|\vec{H}|^2}{16\pi} dS = L_0 \frac{J_0^2}{4c^2}, \quad (8.20)$$

где L_0 - индуктивность линии на единицу ее длины, J_0 - амплитуда тока в проводнике. Поскольку электрическое поле и магнитное поля связаны между собой соотношением $|E| = |H| \sqrt{\mu/\varepsilon}$, то $W_E = W_H$ или

$$C_0 \frac{\varphi_0^2}{2} = L_0 \frac{J_0^2}{2c^2}. \quad (8.21)$$

Отсюда, в частности, следует связь между потенциалом проводника и током в этом проводнике при распространении главной волны

$$\boxed{\varphi_0 = J_0 \rho}, \quad (8.22)$$

где $\rho = \frac{1}{c} \sqrt{L_0/C_0}$ - волновое сопротивление линии в системе СГС. В

системе СИ волновое сопротивление линии есть $\rho = \sqrt{L_0/C_0}$.

8.3. Телеграфное уравнение.

До сих пор распространение волн рассматривалось для случаев, когда амплитуда волны мало менялась на расстоянии порядка волноводной длины волны, λ_W (для главной волны λ_W совпадает с λ). Распространение главной волны вдоль волноведущей системы может быть сравнительно просто рассмотрено и в случае, когда коэффициент затухания волны не мал, а высшие типы волн не существуют, или при условии, когда $c/\omega \gg l_{\perp}$.

Распределение электрического поля в главной волне соответствует распределению электростатического поля при наличии зарядов на проводниках передающей линии. Пусть эти заряды, отнесенные на единицу длины линии, есть $\pm q(z)$. Они связаны с токами $\pm J(z)$, текущими по стенкам линии, уравнением непрерывности

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial z} \quad (8.23)$$

Рассмотрим участок длиной линии (рис.8.1).

Проинтегрируем уравнение

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

по сечению (abcd). Тогда:

$$\int_a^b E_{\perp}(z) dl - \int_c^d E_{\perp}(z+dz) dl + R_0 \Delta z J = -\frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t}, \quad (8.24)$$

где R_0 – сопротивление единицы длины линии. Учтем, что

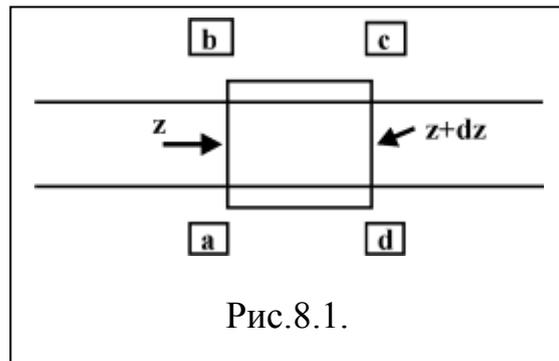


Рис.8.1.

$$\int_a^b E_{\perp}(z) dl = -\varphi(z), \quad \frac{1}{c} \frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{1}{c^2} L_0 \Delta z \frac{dJ}{dt}. \quad (8.25)$$

Тогда

$$-\varphi(z) + \varphi(z + \Delta z) = -\Delta z \left(R_0 J + \frac{L_0}{c^2} \frac{\partial J}{\partial t} \right), \quad (8.26)$$

или

$$-\frac{\partial \varphi}{\partial z} = R_0 J + \frac{1}{c^2} L_0 \frac{\partial J}{\partial t}. \quad (8.27)$$

Пусть C_0 – емкость единицы длины линии. «Разность потенциалов» между ее проводниками $\varphi = q/C_0$. Тогда

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{q}{C_0} + R_0 J + \frac{L_0}{c^2} \frac{\partial J}{\partial t} = 0. \quad (8.28)$$

Дифференцируя это уравнение по времени и считая, что погонная емкость не зависит от координаты, получаем

$$\frac{\partial^2 J}{\partial z^2} - R_0 C_0 \frac{\partial J}{\partial t} - \frac{L_0 C_0}{c^2} \frac{\partial^2 J}{\partial t^2} = 0. \quad (8.29)$$

Полученное уравнение называется телеграфным уравнением. В системе СИ оно имеет вид:

$$\boxed{\frac{\partial^2 J}{\partial z^2} - R_0 C_0 \frac{\partial J}{\partial t} - L_0 C_0 \frac{\partial^2 J}{\partial t^2} = 0}. \quad (8.30)$$

Если потери малы, так что ими можно пренебречь, оно переходит в волновое уравнение со скоростью распространения волны $1/\sqrt{L_0 C_0} = c/\sqrt{\varepsilon \mu}$ (СИ). Если $L = lL_0$, $C = lC_0$, где l – длина линии, то время пробега электромагнитной волны по линии в системе СИ $\tau = l\sqrt{\varepsilon \mu}/c = \sqrt{LC}$.

8.4. Коаксиальная линия.

Пусть имеется коаксиальная линия с радиусами внешнего и внутреннего проводников R_2 и R_1 , соответственно. В качестве граничных примем условия $\varphi(R_2) = 0$, $\varphi(R_1) = \varphi_0$. Для цилиндрической геометрии при условии азимутальной симметрии двумерное уравнение Лапласа имеет вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial \varphi}{\partial r} = 0. \quad (8.31)$$

Его решение $\varphi = A \ln r + B$. Учитывая граничные условия, можно получить

$$\varphi = \varphi_0 \frac{\ln(R_2/r)}{\ln(R_2/R_1)}, \quad (8.32)$$

откуда

$$E_r = \frac{\varphi_0}{r} \frac{1}{\ln(R_2/R_1)}. \quad (8.33)$$

В коаксиальной линии главная волна имеет только радиальную компоненту электрического поля.

Поскольку для главной волны распределение полей не зависит от частоты изменения поля, то распределение магнитного поля в линии может быть найдено как решение стационарной задачи. Пусть по проводникам линии (вдоль нее) протекает не зависящий от времени ток J . Считая, что линия имеет нагрузку, токи по проводникам протекают в противоположных направлениях. Тогда распределение магнитного поля может быть найдено как решение стационарного уравнения

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{4\pi}{c} \vec{j}. \quad (8.34)$$

Поскольку плотность тока имеет только z компоненту, то в области между проводниками

$$\boxed{H_\varphi = \frac{2J}{cr}}. \quad (8.35)$$

Такое же распределение сохранится и при любой зависимости тока от времени.

Отношение φ_0 / J есть волновое сопротивление передающей линии, поэтому

$$\rho_{coaxial} = 2 \frac{E_r \ln(R_2 / R_1)}{H_\varphi c}. \quad (8.36)$$

Поскольку в данном случае $E_r / H_\varphi = \sqrt{\mu / \varepsilon}$, то

$$\begin{aligned} \text{в системе СГС: } & \boxed{\rho_{coaxial} = \frac{1}{c} 2 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ln(R_2 / R_1)}; \\ \text{в системе СИ: } & \boxed{\rho_{coaxial} = 60 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ln(R_2 / R_1)}. \end{aligned} \quad (8.37)$$

В системе СГС $L_0 C_0 = \varepsilon \mu$. Тогда $L_0 C_0 / \rho^2 = c^2 C_0^2$. Или $C_0 = \sqrt{\varepsilon \mu} / c \rho$, а $L_0 = c \rho \sqrt{\varepsilon \mu}$. Следовательно, для индуктивности и емкости коаксиальной линии справедливы выражения

$$\begin{aligned} \boxed{L_{coaxial} = 2l \mu \ln(R_2 / R_1)} \\ \boxed{C_{coaxial} = \frac{l \varepsilon}{2 \ln(R_2 / R_1)}}. \end{aligned} \quad (8.38)$$

8.5. Поток энергии в передающих линиях.

Поток энергии *для главной волны* вдоль волноведущей линии дается средним по времени интегралом по сечению линии от вектора Пойнтинга:

$$\bar{P}_z = \frac{c}{8\pi} \int [\vec{E} \vec{H}] d\vec{S}. \quad (8.39)$$

Учитывая соотношения между полями в волне, то же самое можно записать как

$$\bar{P}_z = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \int \varepsilon \frac{|\vec{E}|^2}{8\pi} d\vec{S} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \int \mu \frac{|\vec{H}|^2}{8\pi} d\vec{S}. \quad (8.40)$$

Поскольку $2W_E = \int \varepsilon \frac{|\vec{E}|^2}{8\pi} d\vec{S} = C_0 \frac{\varphi_0^2}{2}$, $2W_H = \int \varepsilon \frac{|\vec{H}|^2}{8\pi} d\vec{S} = L_0 \frac{J_0^2}{2c^2}$,

$L_0 C_0 = \varepsilon\mu$, а $\rho = \frac{1}{c} \sqrt{L_0 / C_0}$, то

$$\bar{P}_z = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} 2W_E = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}} 2W_H = \frac{\varphi_0^2}{2\rho} = J_0^2 \rho / 2. \quad (8.41)$$

Мгновенное значение потока энергии в линии

$$\boxed{P_z = \frac{\varphi_0^2}{\rho} = J_0^2 \rho}. \quad (8.42)$$

В отсутствии потерь согласно закону сохранения энергии $P_z \neq P_z(z)$. Рассмотрим участок длинной линии между сечениями z_1 и z_2 . Пусть $\rho_1 = \rho(z_1) \neq \rho_2 = \rho(z_2)$. Пусть от z_1 к z_2 распространяется волна, такая, что $\varphi_0(z_1) = \varphi_1$, а $\varphi_0(z_2) = \varphi_2$. Если при $z < z_1$ существует только падающая волна и, таким образом, отраженная волна отсутствует, то

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2} = \sqrt{\frac{\rho_2}{\rho_1}}; \quad \frac{J_1}{J_2} = \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}}. \quad (8.43)$$

В этом случае два участка с различными волновыми сопротивлениями имеют идеальное согласование.

8.6. Коэффициенты отражения и прохождения

Рассмотрим теперь распространение волны по неоднородной линии с учетом отражений. В качестве неоднородности выберем скачок $\rho(z)$.

Пусть изменение волнового сопротивления обусловлено изменением параметров среды заполняющей передающую линию (рис.8.2)

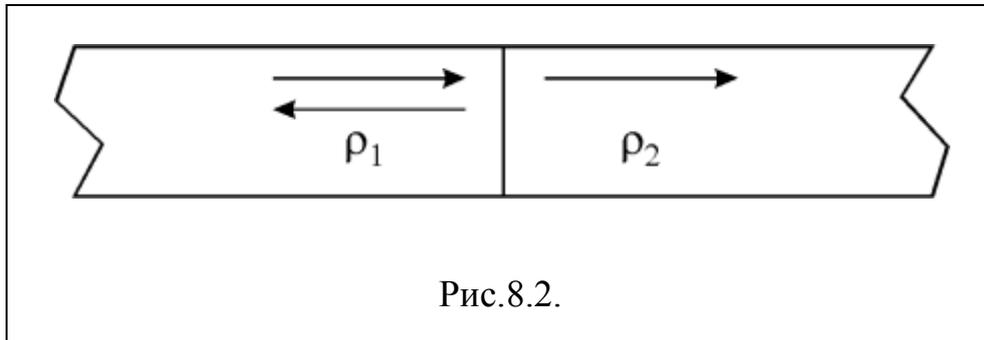


Рис.8.2.

Будем считать, что при отражении от неоднородности *высшие типы волн не возбуждаются*. Тогда при наличии скачка ρ в плоскости $z = z_0$

$$U(z \rightarrow z_0 - 0) = U(z \rightarrow z_0 + 0). \quad (8.44)$$

или функция $U(z)$ непрерывна при переходе через z_0 . Это следует из уравнения

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (8.45)$$

Интегрируя это уравнение по площади, которая включает границу раздела двух сред, получаем:

$$E_{t1} = E_{t2}, \quad (8.46)$$

где E_{t1}, E_{t2} - значение электрического поля на границе раздела. Поскольку рассматриваются поперечные волны, то

$$\begin{aligned} U(z \rightarrow z_0 - 0) &= \int E_{t1} dl \\ U(z \rightarrow z_0 + 0) &= \int E_{t2} dl. \end{aligned} \quad (8.47)$$

То же самое справедливо и для тока в силу справедливости уравнения непрерывности, или

$$J(z \rightarrow z_0 - 0) = J(z \rightarrow z_0 + 0). \quad (8.48)$$

Пусть волна падает на неоднородность слева направо, тогда при $z > z_0$ существует только одна прошедшая волна, а при $z < z_0$ две волны, падающая и отраженная. Согласно закону сохранения потока энергии, считая $P = |P_z|$

$$P_0 = P_+ + P_- , \quad (8.49)$$

где P_0 – поток энергии падающей волны, P_+ – поток энергии прошедшей волны, P_- – поток энергии отраженной волны. То же самое можно записать в виде

$$\frac{U_0^2}{\rho_1} = \frac{U_+^2}{\rho_2} + \frac{U_-^2}{\rho_1} , \quad (8.50)$$

что на языке электротехники есть уравнение баланса мощностей.

Учитывая, что $U_0 + U_- = U_+$, можно записать:

$$\begin{cases} 1 + k_{ref}^U = k_{tr}^U \\ \frac{1}{\rho_1} = \frac{(k_{tr}^U)^2}{\rho_2} + \frac{(k_{ref}^U)^2}{\rho_1} \end{cases} . \quad (8.51)$$

Откуда

$$\boxed{k_{ref}^U = \frac{\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1}{\frac{\rho_2}{\rho_1} + 1}} ; \quad \boxed{k_{tr}^U = 2 \frac{\frac{\rho_2}{\rho_1}}{\frac{\rho_2}{\rho_1} + 1}} . \quad (8.52)$$

Рассмотрим различные частные случаи:

$\rho_2 / \rho_1 = 1$	$k_{ref}^U = 0$	$k_{tr}^U = 1$
$\rho_2 / \rho_1 = 0$	$k_{ref}^U = -1$	$k_{tr}^U = 0$
$\rho_2 / \rho_1 = \infty$	$k_{ref}^U = 1$	$k_{tr}^U = 2$

Аналогичные соотношения можно получить для коэффициентов отражения и прохождения по току. Действительно,

$$\begin{cases} 1 + k_{ref}^J = k_{tr}^J \\ \rho_1 = \rho_2 (k_{tr}^J)^2 + \rho_1 (k_{ref}^J)^2 \end{cases} \quad (8.53)$$

Откуда:

$$\boxed{k_{ref}^J = -\frac{\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1}{\frac{\rho_2}{\rho_1} + 1}}; \quad \boxed{k_{tr}^J = \frac{2}{\frac{\rho_2}{\rho_1} + 1}} \quad (8.54)$$

Отличие в коэффициентах по напряжению и по току связано с тем, что при отражении волны направление тока изменяет знак, поскольку изменяется направление магнитного поля волны.

Значения коэффициентов для различных частных случаев приведены в таблице.

$\rho_2 / \rho_1 = 1$	$k_{ref}^J = 0$	$k_{tr}^J = 1$
$\rho_2 / \rho_1 = 0$	$k_{ref}^J = 1$	$k_{tr}^J = 2$
$\rho_2 / \rho_1 = \infty$	$k_{ref}^J = -1$	$k_{tr}^J = 0$

Пусть импульс распространяется по полубесконечной передающей линии, нагрузка которой содержит $L C R$ элементы. Тогда:

$$U_0 + U_- = J_{Load} R + L \frac{dJ_{Load}}{dt} + \frac{1}{C} \int J_{Load} dt \quad (8.55)$$

Учтем, что $k_{ref}^U = -k_{ref}^J$. Тогда:

$$J_- = k_{ref}^J J_0 = k_{ref}^J \frac{U_0}{\rho} = -k_{ef}^U \frac{U_0}{\rho} = -\frac{U_-}{\rho}$$

$$J_{Load} = J_0 + J_- = \frac{U_0}{\rho} - \frac{U_-}{\rho}. \quad (8.56)$$

Заменяя U_- в первом уравнении, можно получить:

$$J_{Load}(R + \rho) + L \frac{dJ_{Load}}{dt} + \frac{1}{C} \int J_{Load} dt = 2U_0$$

$$U_- = U_0 - J_{Load} \rho. \quad (8.57)$$

Рассмотрим различные частные случаи при условии, что $U_0 = const$.

Случай 1. Чисто активная нагрузка: $Z_L = R$. Тогда

$$J_{Load}(R + \rho) = 2U_0,$$

или

$$J_{Load} = \frac{2U_0}{R + \rho}$$

$$U_{Load} = 2U_0 \frac{R}{R + \rho}$$

$$U_- = U_0 - 2U_0 \frac{\rho}{R + \rho} = U_0 \frac{R - \rho}{R + \rho}.$$

При $R \gg \rho$ напряжение на нагрузке $U_{Load} \approx 2U_0$ (в пределе - удвоение напряжение на разомкнутом конце линии – режим холостого хода).

При $R \ll \rho$ напряжение на нагрузке $U_{Load} \approx 2U_0 R / \rho$ (в пределе – режим короткого замыкания).

При $R = \rho$ напряжение на нагрузке $U_{Load} = U_0$ или соответствует амплитуде падающей волны. В последнем случае подключение **согласованной нагрузки** эквивалентно подключению длинной линии с волновым сопротивлением ρ .

Как уже отмечалось, главная волна в передающей линии имеет линейный закон дисперсии, поэтому, если пренебречь дисперсией диэлектрической среды, электромагнитные волны могут распространяться по линии и в виде нерасплывающегося волнового пакета.

Случай 2. Чисто емкостная нагрузка (C).

Пусть по линии распространяется идеальный перепад напряжения. Тогда

$$J_{Load}\rho + \frac{1}{C} \int J_{Load} dt = 2U_0.$$

Если емкость в момент прихода импульса была незаряженной, то решение последнего уравнения есть:

$$J_{Load} = \frac{2U_0}{\rho} e^{-t/\rho C}.$$

Напряжение на емкости имеет вид:

$$U_C = 2U_0(1 - e^{-t/\rho C}),$$

а отраженная волна:

$$U_- = U_0(1 - 2e^{-t/\rho C}).$$

Случай 2. Чисто индуктивная нагрузка (L).

Тогда, при тех же условиях идеального перепада напряжения, бегущего по линии,

$$J_{Load}\rho + L \frac{dJ_{Load}}{dt} = 2U_0.$$

Решение этого уравнения

$$J = \frac{2U_0}{\rho} (1 - e^{-t\rho/L}).$$

Напряжение на индуктивности имеет вид

$$U_L = 2U_0 e^{-t\rho/L},$$

а отраженная волна

$$U_- = -U_0(1 - 2e^{-t\rho/L}).$$

8.7. Неоднородные линии

Рассмотрим неоднородную линию, волновое сопротивление которой $\rho = \rho(z)$. Пусть функция $\rho(z)$ такова, что ее характерный пространственный масштаб изменения $L \gg V\tau_p$. В этом случае в нулевом приближении можно считать, что форма импульса не изменяется при его распространении по неоднородной линии. Разобьем линию на отдельные отрезки длиной Δz . Тогда

$$U(z + \Delta z) \approx U(z)(1 + k_{ref}). \quad (8.58)$$

Коэффициент отражения:

$$k_{ref} \approx \frac{\rho(z + \Delta z) - \rho(z)}{\rho(z + \Delta z) + \rho(z)}. \quad (8.59)$$

При малых Δz , когда $\rho(z + \Delta z) \approx \rho(z)$:

$$k_{ref} \approx \frac{1}{2\rho(z)} \frac{\partial \rho(z)}{\partial z} \Delta z. \quad (8.60)$$

Тогда

$$U(z + \Delta z) - U(z) \approx U(z) \frac{1}{2\rho(z)} \frac{\partial \rho}{\partial z} \Delta z, \quad (8.61)$$

или

$$\frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial z} \approx \frac{1}{2\rho} \frac{\partial \rho}{\partial z}. \quad (8.62)$$

Решение последнего уравнения есть

$$U(z) \approx U(0) \sqrt{\frac{\rho(z)}{\rho(0)}}. \quad (8.63)$$

Пример: Ступенчатая линия

Рассмотрим распространение импульса длительностью τ_p по длинной линии, состоящей из N отрезков однородных линий с различными волновыми сопротивлениями. Пусть длина каждого отрезка $l > V\tau_p/2$, где V – скорость распространения волны по линии, а волновое сопротивление j -ого отрезка есть $\rho_j = (1 + \delta)\rho_{j-1}$. Входное волновое сопротивление линии есть ρ_0 . Пусть линия нагружена на сопротивление $R_L = (1 + \delta)\rho_N$. Амплитуда входного импульса U_{in} . Тогда амплитуда импульса в j -ом отрезке есть:

$$U_j = U_{j-1} k_{tr} = U_{j-1} \frac{2(1 + \delta)}{2 + \delta} = U_0 \left(\frac{1 + \delta}{1 + \delta/2} \right)^j.$$

Амплитуда сигнала на нагрузке

$$U_L = U_0 \left(\frac{1 + \delta}{1 + \delta/2} \right)^{N+1} = U_0 \frac{(1 + \delta)^{N+1}}{\left(1 + \frac{\delta}{2}\right)^{N+1}}.$$

Очевидно, что $(1 + \delta)^{N+1} = R_L / \rho_0$. Если $\delta \ll 1$, то $(N + 1)\delta \approx \ln(R_L / \rho_0)$. Если $\ln(R_L / \rho_0) \geq 1$, то необходимо, чтобы $N \approx \ln(R_L / \rho_0) / \delta \gg 1$. При $N \gg 1$

$$U_L \approx U_0 \frac{R_L / \rho_0}{\left(1 + \frac{\ln(R_L / \rho_0)}{2(N + 1)}\right)^{\frac{2(N + 1) \ln(R_L / \rho_0)}{2}}} \approx U_0 \sqrt{\frac{R_L}{\rho_0}}.$$

Поскольку $\lim(1 + 1/n)^n = e$ при $n \rightarrow \infty$, а $e^{a \ln b} = b^a$. Отсюда следует, что при $\Delta\rho \ll \rho$ сигнал распространяется по ступенчатой линии практически

без потерь и, таким образом осуществляется согласование линий с различными волновыми сопротивлениями.

Оценим величину потерь при распространении импульса по ступенчатой линии. При переходе через неоднородность амплитуда отраженного сигнала есть

$$U_j^- = U_j k_{ref} \approx \frac{\delta}{1 + \delta/2} \frac{U_j}{2}.$$

При $\alpha \ll 1$

$$U_j^- = \frac{\delta}{2} U_j.$$

Поток энергии отраженного импульса на каждом участке

$$\frac{\Delta P_j}{P_j} \approx \frac{\delta^2}{4}.$$

Суммарная потеря потока энергии при передаче импульса по ступенчатой линии

$$\frac{\Delta P}{P} = \sum_j \frac{\Delta P_j}{P_j} \approx \frac{N\delta^2}{4} = \frac{\ln^2 R_L / \rho_0}{4N}.$$

8.8. Передающая линия с дискретной неоднородностью.

Выше, при анализе неоднородных линий, предполагалось достаточно плавное (адиабатическое) изменение волнового сопротивления вдоль продольной координаты. На практике даже в однородных длинных линиях существуют дискретные неоднородности: поддерживающие и разделительные изоляторы, так называемые градиентные электроды в краевых областях и т.п. Как правило, эти неоднородности имеют относительно малый продольный масштаб – меньший характерных

поперечных размеров системы. Тем не менее, при передаче импульсов с крутым фронтом (в пределе – идеального перепада) дискретная неоднородность вносит искажения.

Представим себе однородную линию с волновым сопротивлением ρ , в расщелку которой включен короткий (в масштабе длительности падающего импульса) отрезок другой линии с отличающимся волновым сопротивлением Z . Длина задержки линии Z принимается равной τ . Падающий слева на такую неоднородность импульс с амплитудой V_0 представим в виде ступенчатого перепада с крутым фронтом. Фронт импульса претерпевает отражение от скачка $\rho \rightarrow Z$, но отражённый импульс уходит обратно по полубесконечной линии ρ . Прошедший же в линию Z импульс оказывается в так называемой кольцевой цепи, образованной соединениями $\rho \rightarrow Z$ и $Z \rightarrow \rho$. Здесь происходят многократные переотражения, которые суммируются с постоянно поступающими слева новыми порциями падающей волны. Через правый скачок $Z \rightarrow \rho$ суммированная с отражениями волна поступает в выходной тракт и «регистрируется».

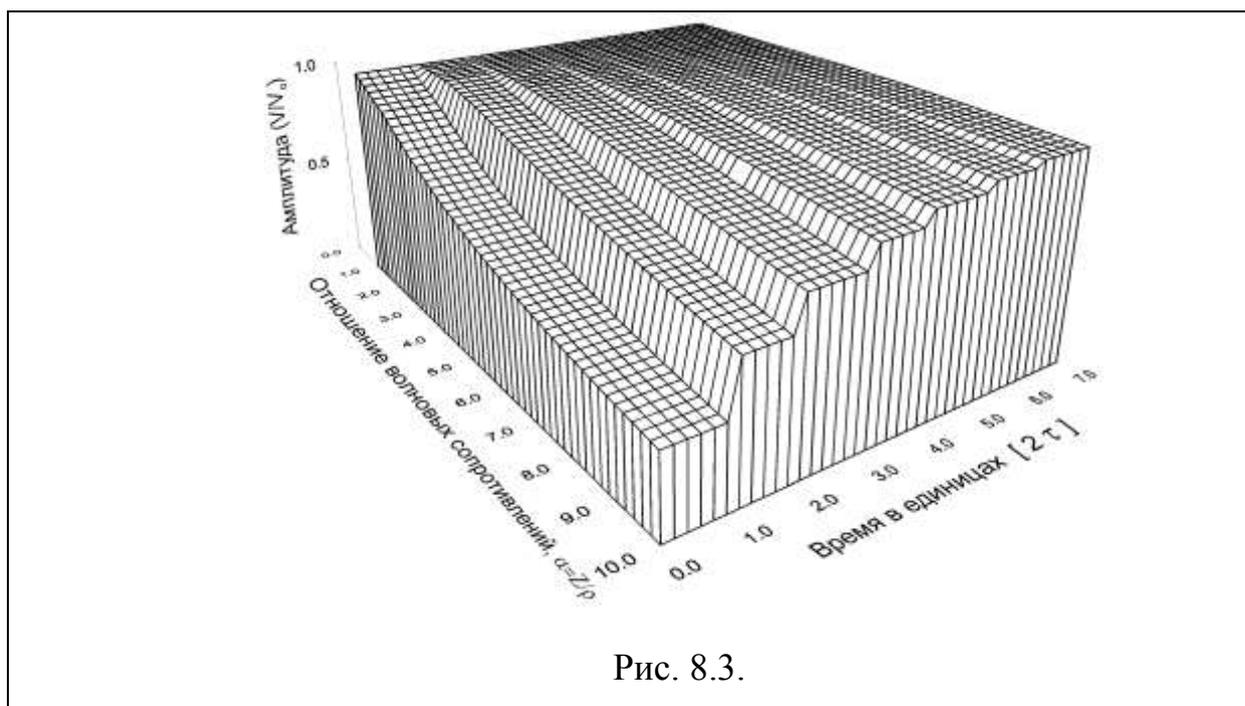
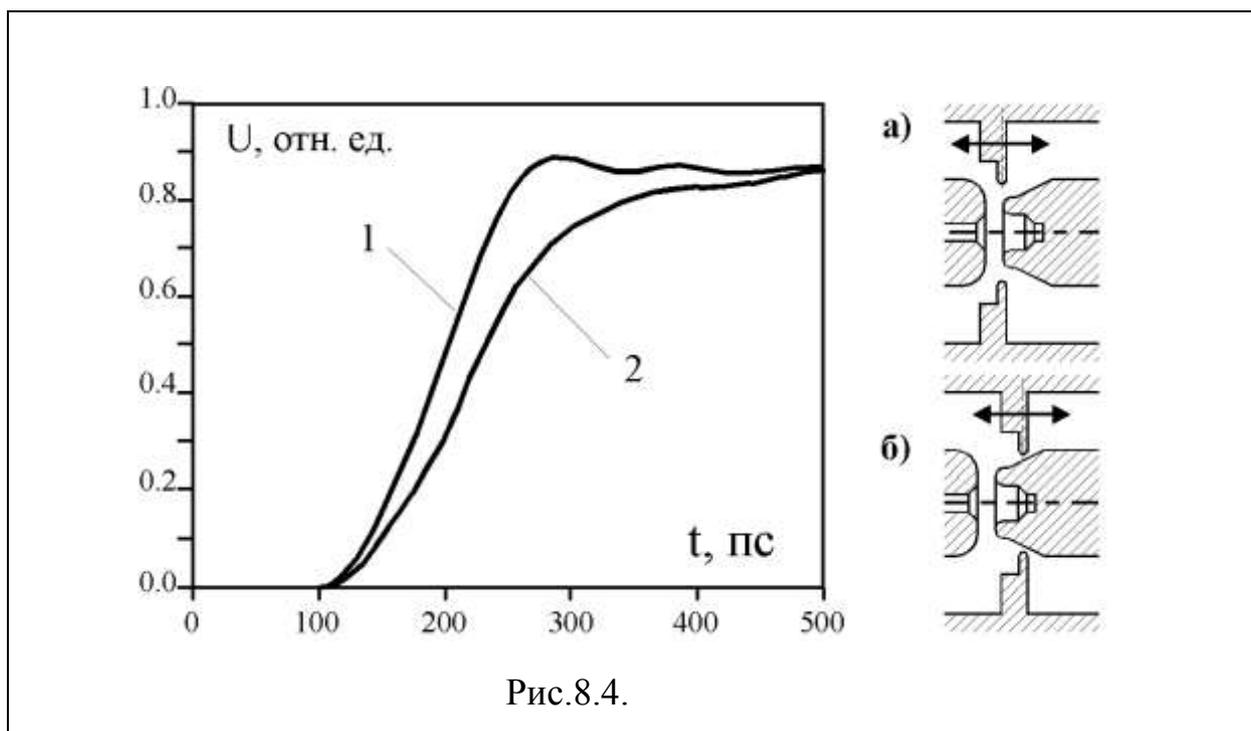


Рис. 8.3.

Понятно, что процесс установления выходной амплитуды в идеале бесконечен по времени, а что касается ступенчатого фронта, то он окажется искажен, и степень этого искажения зависит от соотношения ρ и Z . Результат рекуррентного расчёта данного процесса по формулам (8.52) показан на рис.8.3.

На рис.8.4 показан практический пример искажения неидеального фронта импульса, проходящего по коаксиальному тракту (линии) вблизи разрыва центрального электрода при замыкании этого промежутка искрой в условиях, когда меняется осевое положение дополнительного заземлённого кольцевого электрода. Уменьшение зазора (а \rightarrow б) приводит к завалу фронта импульса (2), что, в целом, соответствует картине на рис.8.3.



9. Однородные формирующие линии.

9.1. Одиночная формирующая линия.

Отрезок длинной линии может быть использован для формирования высоковольтных импульсов на нагрузке. При использовании коммутаторов - замыкателей схема формирования импульса может быть представлена в виде, как на Рис.9.1.

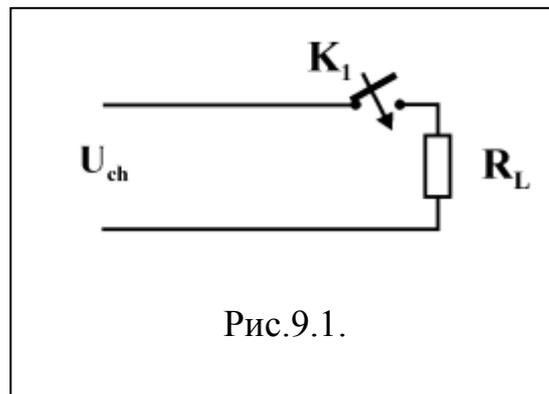


Рис.9.1.

До срабатывания коммутатора формирующая линия (ФЛ) заряжается до напряжения U_{ch} от внешнего источника. При зарядке формирующая линия представляет собой емкостный накопитель энергии. Для разряда линии в волновом режиме необходимо, чтобы время коммутации ключа было много меньше электрической длины ФЛ, то есть, - времени пробега сигнала вдоль электродов линии (конденсатора). Разумеется, предъявляются определенные требования и к характеру нагрузки.

Представление заряженной ФЛ.

Заряженную ФЛ до момента включения коммутатора можно представить в виде линии, по которой распространяется электромагнитный импульс в виде ТЕМ-волны с напряжением $U_{ch}/2$ и длительностью $2\tau_{tr}$, где τ_{tr} – время пробега электромагнитной волны по линии. Поскольку линия разомкнута с обеих сторон, то на ее концах происходит отражение волны с коэффициентом $k_{ref}^U = 1$. Таким образом, в любом сечении линии имеется два импульса распространяющихся в противоположных направлениях, а суммарное напряжение согласно принципу суперпозиции полей в каждом сечении есть U_{ch} .

Разряд ФЛ на активную нагрузку

После срабатывания коммутатора на нагрузке R_L появляется напряжение, определяемое амплитудой падающей волны ($U_{ch}/2$) и соотношением ρ и R_L :

$$U_R^{(1)} = \frac{U_{ch}}{2} (1 + k_{ref}^U). \quad (9.1)$$

Если $R_L = \rho$, то $k_{ref}^U = 0$, а $U_R = U_{ch}/2$. Длительность импульса равна двойному времени пробега по линии. Если $R_L \neq \rho$, то при $0 < t < 2\tau_{tr}$ напряжение на нагрузке $U_R \neq U_{ch}/2$. Непосредственно перед включением коммутатора волна, отраженная от нагрузки имела амплитуду $U_{ch}/2$. После срабатывания коммутатора амплитуда отраженной волны есть $k_{ref}^U U_{ch}/2$. Таким образом,

$$0 < t < 2\tau_{tr} \quad U_R^{(1)} = \frac{U_{ch}}{2} (1 + k_{ref}^U) \quad (9.2)$$

$$2\tau_{tr} < t < 4\tau_{tr} \quad U_R^{(2)} = \frac{U_{ch}}{2} k_{ref}^U (1 + k_{ref}^U) \quad (9.3)$$

$$4\tau_{tr} < t < 6\tau_{tr} \quad U_R^{(3)} = \frac{U_{ch}}{2} (k_{ref}^U)^2 (1 + k_{ref}^U) \quad (9.4)$$

$$2(N-1)\tau_{tr} < t < 2N\tau_{tr} \quad U_R^{(N)} = \frac{U_{ch}}{2} (k_{ref}^U)^{N-1} (1 + k_{ref}^U), \quad (9.5)$$

или, в виде рекуррентной формулы:

$$\boxed{U_R^{(N)} = U_{ch} \frac{1}{(1 + \rho/R_L)} \left(\frac{1 - \rho/R_L}{1 + \rho/R_L} \right)^{N-1}}. \quad (9.6)$$

Пример 1: Высокоомная активная нагрузка, $R_L \gg \rho$. Тогда, вводя время $t = 2\tau_{tr}N$, последнее выражение можно записать как

$$U_R(t) = U_{ch} \frac{1}{1 - \frac{\rho}{R_L}} \left(\frac{1 - \rho/R_L}{1 + \rho/R_L} \right)^N \approx U_{ch} \left(1 - 2 \frac{\rho}{R_L} \right)^{t/2\tau_{tr}}. \quad (9.7)$$

Учтем, что

$$2 \frac{\rho}{R_L} = 2 \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \frac{C_0}{R_L C_0} = 2 \frac{\sqrt{LC}}{R_L C} = 2 \frac{\tau_{tr}}{R_L C} \ll 1. \quad (9.8)$$

Таким образом, поскольку $\lim_{N \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{N} \right)^N = e$:

$$U_R(t) \approx U_{ch} \left(1 - \frac{2\tau_{tr}}{R_L C} \right)^{\left(-\frac{R_L C}{2\tau_{tr}} \right) \left(-\frac{t}{R_L C} \right)} \approx U_{ch} e^{-\frac{t}{R_L C}}. \quad (9.9)$$

При большом N

$$\ln \left(1 + \frac{1}{N} \right)^N = N \ln(1 + 1/N) \approx N \frac{1}{N} = 1. \quad (9.10)$$

Таким образом, при $R_L \gg \rho$ разряд линии при $t \gg \tau_p$ эквивалентен разряду сосредоточенной емкости на активное сопротивление.

Пример 2: Высокоомная активная нагрузка, $R_L < \rho$. В этом случае

$k_{ref}^U < 0$. На нагрузке будет формироваться знакопеременная

последовательность импульсов

$$0 < t < 2\tau_{tr} \quad U_R^{(2)} = \frac{U_{ch}}{2} (1 - |k_{ref}^U|) \quad (9.11)$$

$$2\tau_{tr} < t < 4\tau_{tr} \quad U_R^{(2)} = -\frac{U_{ch}}{2} |k_{ref}^U| (1 - |k_{ref}^U|) \quad (9.12)$$

$$4\tau_{tr} < t < 6\tau_{tr} \quad U_R^{(3)} = \frac{U_{ch}}{2} |k_{ref}^U|^2 (1 - |k_{ref}^U|) \quad (9.13)$$

$$2(N-1)\tau_{tr} < t < 2N\tau_{tr} \quad U_R^{(N)} = (-1)^{N-1} \frac{U_{ch}}{2} |k_{ref}^U|^{N-1} (1 - |k_{ref}^U|), \quad (9.14)$$

или

$$U_R^{(N)} = U_{ch} (-1)^N \frac{R_L / \rho}{1 + \frac{R_L}{\rho}} \left(\frac{1 - R_L / \rho}{1 + R_L / \rho} \right)^{N-1} =$$

$$= U_{ch} (-1)^N \left(\frac{R_L / \rho}{1 - R_L / \rho} \right) \left(\frac{1 - R_L / \rho}{1 + R_L / \rho} \right)^N \quad (9.15)$$

Учтем, что $2 \frac{R_L}{\rho} = 2 \sqrt{\frac{C_0}{L_0}} \frac{R_L L_0}{L_0} = 2 \frac{R_L \sqrt{LC}}{L} = 2 \frac{R_L \tau_{tr}}{L} \ll 1$. Тогда амплитуда колебаний напряжения на нагрузке при $t \gg \tau_{tr}$ есть

$$U_r(t) \approx U_{ch} \frac{R_L}{\rho} \left(1 - \frac{2\tau_{ch} R_L}{L} \right) \left(-\frac{L}{2\tau_{tr} R_L} \right) \left(-\frac{R_L t}{L} \right) \approx U_{ch} \frac{R_L}{\rho} e^{-\frac{R_L t}{L}}. \quad (9.16)$$

Таким образом, разряд линии на низкоомную нагрузку эквивалентен разряду емкости в высокодобротном LC -контуре. В таком контуре амплитуда колебаний тока (огивающая) выражается в виде:

$$J(t) = \frac{U_{ch}}{\rho} e^{-R_L t / L}. \quad (9.17)$$

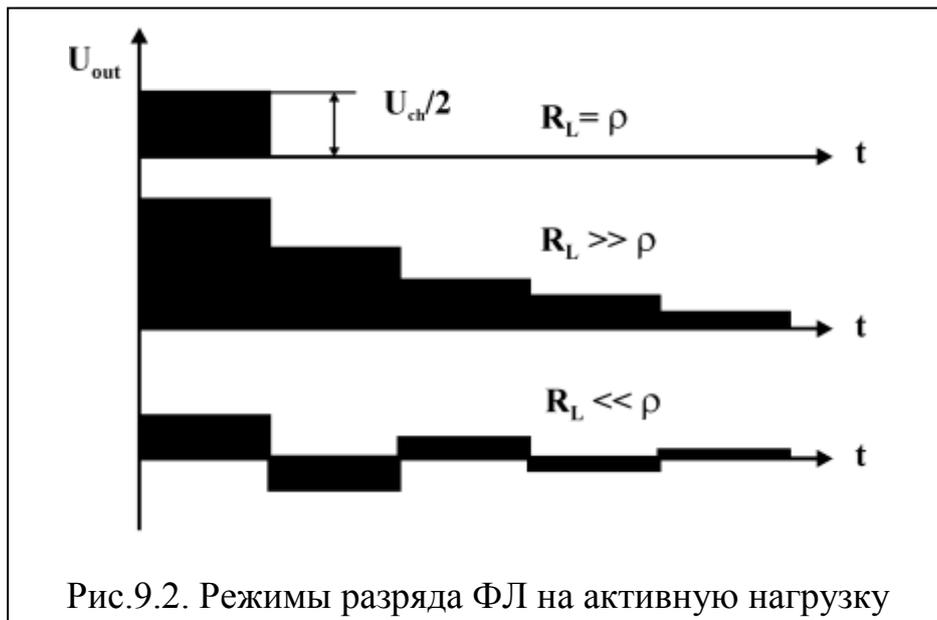


Рис.9.2. Режимы разряда ФЛ на активную нагрузку

9.2. Оптимальные параметры коаксиальной формирующей линии

При использовании формирующих линий обычно требуется оптимизации их геометрических параметров. Рассмотрим, например, одиночную коаксиальную формирующую линию. Если задан радиус внешнего проводника, и максимальное электрическое поле, которое может быть достигнуто в линии (из-за ограничений, связанных с прочностью диэлектрика), то изменение радиуса внутреннего проводника линии будет приводить к изменению максимальной запасаемой энергии в линии и максимального напряжения, которое может быть получено в линии.

Пусть радиус внешнего проводника коаксиальной линии есть R_2 , а радиус внутреннего проводника R_1 . Тогда электрическое поле между проводниками линии

$$E_R = \frac{U_{ch}}{R \ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (9.18)$$

Электрическое поле принимает максимальное значение на внутреннем проводнике линии

$$E_R^{max} = \frac{U_{ch}}{R_1 \ln \frac{R_2}{R_1}}. \quad (9.19)$$

Обозначим: $\beta = R_2 / R_1$. Тогда вместо (9.19) можно записать

$$E_R^{max} = \frac{U_{ch}}{R_2} \frac{\beta}{\ln \beta}. \quad (9.20)$$

Пусть $R_2 = const$, $E_R^{max} = const$. Введем величину $U_0 = R_2 E_R^{max}$.

Рассмотрим, при каком значении β величина зарядного напряжения принимает максимальное значение?

Из (9.20) следует, что

$$U_{ch} = U_0 \frac{\ln \beta}{\beta} = U_0 F_U(\beta), \quad (9.21)$$

где $F_U(\beta) = \ln \beta / \beta$. Видно, что при $\beta \rightarrow 1$ и $\beta \rightarrow \infty$ величина напряжения $U_{ch} \rightarrow 0$. Дифференцируя (9.21) и приравнивая производную нулю:

$$\frac{\partial F_U}{\partial \beta} = \frac{1}{\beta^2} - \frac{\ln \beta}{\beta^2} = 0$$

можно получить, что зарядное напряжение коаксиальной формирующей линии принимает максимальное значений при $\ln \beta = 1$ или $\beta = e$. Волновое сопротивление коаксиальной линии

$$\rho = \frac{60}{\sqrt{\varepsilon / \mu}} \ln \beta = \rho_0 \ln \beta. \quad (9.22)$$

Например, для линии с масляной изоляцией $\rho_0 = 40$ Ом. Таким образом, для коаксиальной линии напряжение зарядки линии максимально, если $\rho = 40$ Ом. Для оптимального импеданса

$$U_{ch}^{max} = U_{ch}(\beta = 1) = \frac{1}{e} U_0. \quad (9.23)$$

Запасаемая энергия при этом

$$W(\beta = 1) = \frac{1}{4e^2} \frac{U_0^2}{\rho_0}. \quad (9.24)$$

Определим, при каком значении β принимает максимальное значение величина запасаемой в линии энергии?

Энергия, запасаемая в формирующей линии

$$W = \frac{1}{4} \frac{U_{ch}^2}{\rho} \tau_p = \frac{U_0^2 \tau_p \ln \beta}{4 \rho_0 \beta^2} = \frac{U_0^2 \tau_p}{4 \rho_0} F_W(\beta), \quad (9.25)$$

где $F_W = \ln \beta / \beta^2$. Далее,

$$\frac{\partial F_W}{\partial \beta} = \frac{1}{\beta^3} - \frac{2 \ln \beta}{\beta^3} = 0. \quad (9.26)$$

Отсюда следует, что энергия, запасаемая в формирующей линии принимает максимальное значение при $\ln \beta = 1/2$ или $\beta = \sqrt{e}$. Для коаксиальной линии с масляной изоляцией запасаемая энергия максимальна при $\rho = 20$ Ом. Для оптимального импеданса

$$W_{max} = W(\beta = 1/2) = \frac{U_0^2 \tau p}{8e\rho_0}, \quad (9.27)$$

а зарядное напряжение линии

$$U_{ch}(\beta = 1/2) = \frac{1}{2\sqrt{e}} U_0. \quad (9.28)$$

Отметим также, что

$$\frac{W(\beta = 1)}{W(\beta = 1/2)} = \frac{2}{e}; \quad (9.29)$$

$$\frac{U_{ch}(\beta = 1)}{U_{ch}(\beta = 1/2)} = \frac{2}{\sqrt{e}}. \quad (9.30)$$

Рассмотрим вопросы оптимизации энерговыделения в нагрузке.

Пусть коаксиальная формирующая линия разряжается на нагрузку с сопротивлением R_L . Тогда напряжение на нагрузке в первом импульсе есть

$$U_L = U_{ch} \frac{R_L}{R_L + \rho} = U_0 \frac{\ln \beta}{\beta} \frac{R_L / \rho_0}{\ln \beta + R_L / \rho_0} = U_0 \frac{\ln \beta}{\beta} \frac{\alpha}{\ln \beta + \alpha}. \quad (9.31)$$

Здесь $\alpha = R_L / \rho_0$. **Максимальное значение напряжения на нагрузке** при заданном ее сопротивлении соответствует максимальному значению мощности и энергии, выделяемой в нагрузке.

$$\frac{\partial U_L(\beta)}{\partial \beta} \propto \frac{\alpha}{\ln \beta + \alpha} \left(\frac{1}{\beta^2} - \frac{\ln \beta}{\beta^2} \right) - \frac{\ln \beta}{\beta^2} \frac{\alpha}{(\ln \beta + \alpha)^2}. \quad (9.32)$$

Величина напряжения на нагрузке принимает максимальное значение при выполнении условия

$$\ln^2 \beta + \alpha \ln \beta - \alpha = 0. \quad (9.33)$$

Откуда

$$\ln \beta_{opt} = \sqrt{\frac{\alpha^2}{4} + \alpha} - \frac{\alpha}{2}. \quad (9.34)$$

Как видно, при $\alpha \ll 1$ или $R_L \ll \rho_0$, $\ln \beta \approx \alpha^{1/2}$ или $\rho \approx (\rho_0 R_L)^{1/2}$. В обратном предельном случае $\alpha \gg 1$ или $R_L \gg \rho_0$, $\ln \beta \approx 1$, что для линии с масляной изоляцией соответствует волновому сопротивлению $\rho \approx 40$ Ом. Зависимость оптимального импеданса линии с масляной изоляцией от импеданса нагрузки показана на Рис.9.3.

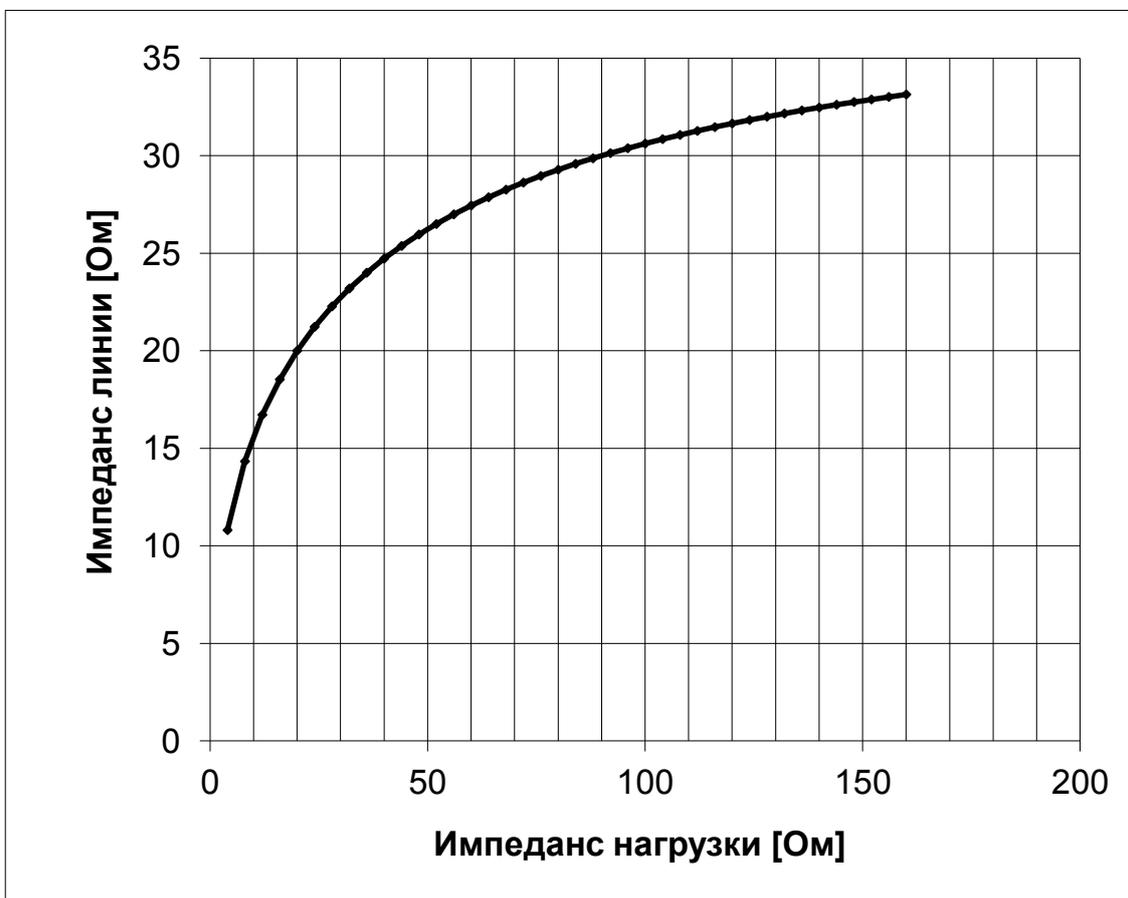


Рис.9.3.

Эффективность передачи энергии из формирующей линии в нагрузку есть

$$\eta = \left(\frac{U_L^2}{R_L} \right) / \left(\frac{U_{ch}^2}{4\rho_{FL}} \right). \quad (9.35)$$

Если импеданс линии является оптимальным, то

$$\eta = 4 \frac{\alpha \ln \beta}{(\alpha + \ln \beta)^2}. \quad (9.36)$$

Максимум функции $\eta(\alpha)$ соответствует значению $\alpha = 1/2$.

Зависимость эффективности передачи энергии из формирующей линии в нагрузку при оптимальном волновом сопротивлении формирующей линии приведена на рис. Рис.9.4.

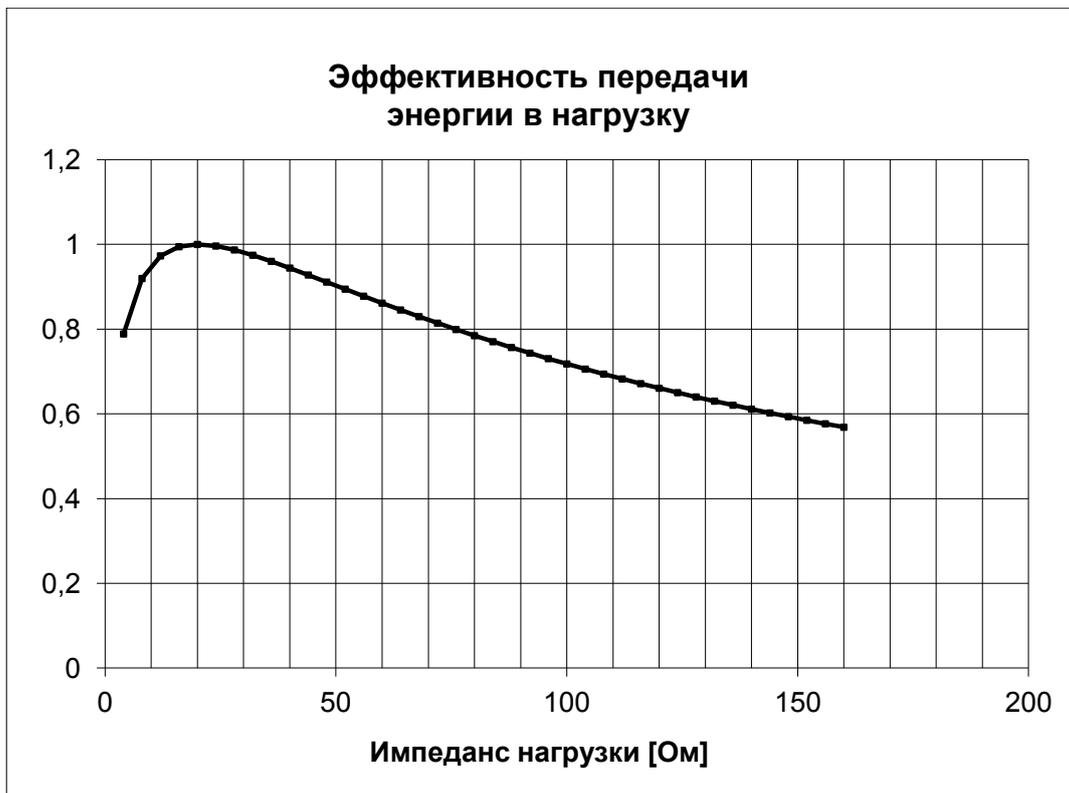


Рис.9.4.

9.3. Двойная формирующая линия

Схема двойной формирующей линии (ДФЛ), или линии Блюмлейна, показана на Рис.9.5,а. В несколько измененном виде то же самое можно представить, как на Рис.9.5,б.

Рассмотрим распространение импульса в такой системе линий в случае, когда волновое сопротивление двух линий равны (ρ), а сопротивление нагрузки $R_L = 2\rho$.

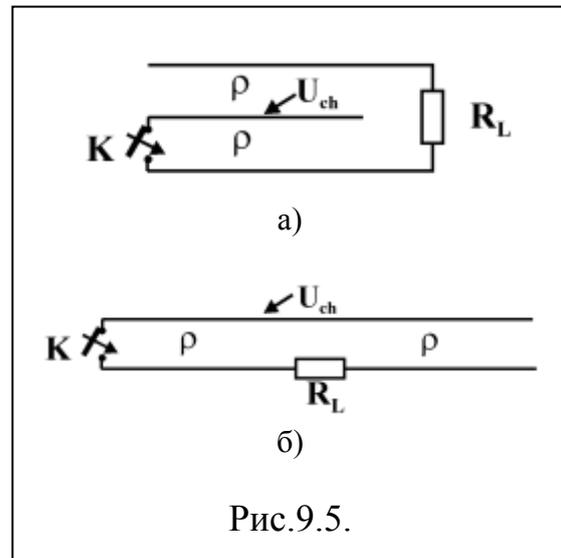


Рис.9.5.

Общее рассмотрение.

Пусть, например, слева направо (Рис.9.5,б) распространяется импульс с амплитудой U_1^+ . Для такого импульса нагрузка и вторая линия включены последовательно. Их суммарное сопротивление равно 3ρ . Коэффициент отражения от такой неоднородности есть:

$$k_{ref}^U = \frac{3\rho - \rho}{3\rho + \rho} = \frac{1}{2}. \quad (9.37)$$

Амплитуда отраженного импульса есть

$$U_1^- = \frac{1}{2}U_1^+. \quad (9.38)$$

Коэффициент прохождения для такой неоднородности (смотри параграф 7.6) из одной линии в другую

$$k_{tr}^U = \frac{2(R + \rho)}{R + 2\rho} \frac{\rho}{R + \rho} = \frac{1}{2}. \quad (9.39)$$

Таким образом, по второй линии с волновым сопротивлением ρ будет распространяться импульс с амплитудой

$$U_2^+ = k_{tr}^U U_1^+ = \frac{1}{2} U_1^+. \quad (9.40)$$

Представление заряженной ДФЛ.

В начальном состоянии линия заряжена, и центральный проводник имеет потенциал U_{ch} относительно двух других. Так же как и обычной линии будем считать, что в начальном (заряженном) состоянии по линии распространяется импульс с амплитудой $U_{ch}/2$, который при отражении на концах рождает такой же импульс, распространяющийся в противоположном направлении. Учитывая предыдущее рассмотрение, видно, что в этом состоянии

$$\begin{aligned} U_1^+ &= \frac{1}{2} U_{ch} \\ U_2^- &= \frac{1}{2} U_{ch} \end{aligned} \quad (9.41)$$

Первый импульс рождает 2 импульса

$$U_1^+ \Rightarrow \begin{cases} U_{1 \rightarrow 1}^- = \frac{1}{4} U_{ch} \\ U_{1 \rightarrow 2}^+ = \frac{1}{4} U_{ch} \end{cases} \quad (9.42)$$

Второй импульс также рождает 2 импульса

$$U_2^- \Rightarrow \begin{cases} U_{2 \rightarrow 1}^- = \frac{1}{4} U_{ch} \\ U_{2 \rightarrow 2}^+ = \frac{1}{4} U_{ch} \end{cases} \quad (9.43)$$

Таким образом,

$$U_1^- = U_{1 \rightarrow 1}^- + U_{2 \rightarrow 1}^- = \frac{1}{2} U_{ch} \quad (9.44)$$

$$U_2^+ = U_{1 \rightarrow 2}^+ + U_{2 \rightarrow 2}^+ = \frac{1}{2} U_{ch} . \quad (9.45)$$

Как видно, в каждом сечении линий распространяются импульсы с одинаковыми амплитудами, движущиеся в противоположных направлениях с амплитудами $U_1^+ = U_1^- = U_2^+ = U_2^- = U_{ch} / 2$. Суммарное напряжение в линии есть U_{ch} , а **разность потенциалов на нагрузке всегда равна нулю**.

Замечание: Случай $R_L = 2\rho$ был выбран для простоты анализа. Вывод о том, что до коммутации разрядника разность потенциалов на нагрузке всегда равна нулю, остаётся справедливым при любом сочетании волновых сопротивлений линий и нагрузки, то есть, когда $R_L \neq 2\rho$.

Режим разряда ДФЛ.

Пусть, как и раньше, $R_L = 2\rho$. В момент времени $t = 0$ происходит **срабатывание коммутатора**. Это приводит к тому, что левая линия закорачивается. В ней появляется импульс, распространяющийся слева направо с амплитудой $U_1^+ = -U_{ch} / 2$, который достигает нагрузки через промежуток времени τ_{tr} . В течение моментов времени $\tau_{tr} \leq t < 3\tau_{tr}$ потенциалы вблизи нагрузки остаются неизменными. Для этих моментов времени

$$\begin{aligned} U_1^+ &= -U_{ch} / 2 \\ U_1^- &= U_{1 \rightarrow 1}^- + U_{2 \rightarrow 1}^- = k_{1 \rightarrow 1}^{ref} U_1^+ + k_{2 \rightarrow 1}^{tr} U_2^- = -\frac{1}{4} U_{ch} + \frac{1}{4} U_{ch} = 0 \\ U_2^+ &= U_{1 \rightarrow 2}^+ + U_{2 \rightarrow 2}^+ = k_{1 \rightarrow 2}^{tr} U_1^+ + k_{2 \rightarrow 2}^{ref} U_2^- = -\frac{1}{4} U_{ch} + \frac{1}{4} U_{ch} = 0 \\ U_2^- &= U_{ch} / 2 \end{aligned} \quad (9.46)$$

Разность потенциалов на нагрузке для этих же моментов времени есть

$$U_L = (U_1^+ + U_1^-) - (U_2^+ + U_2^-) = U_1^+ - U_2^- = -U_{ch} \quad (9.47)$$

Для $t > 3\tau_{tr}$ амплитуды всех импульсов равны нулю. Таким образом, срабатывание коммутатора приводит к тому, что энергия, накопленная в двойной линии, выводится в нагрузку $R = 2\rho$ в виде электрического импульса с амплитудой U_{ch} и длительностью $\tau_p = 2\tau_{tr}$. Следует также обратить особое внимание на тот факт, что, в отличие от обычной ФЛ, двойная формирующая линия обеспечивает в согласованном режиме разряда вдвое большую амплитуду импульса на нагрузке.

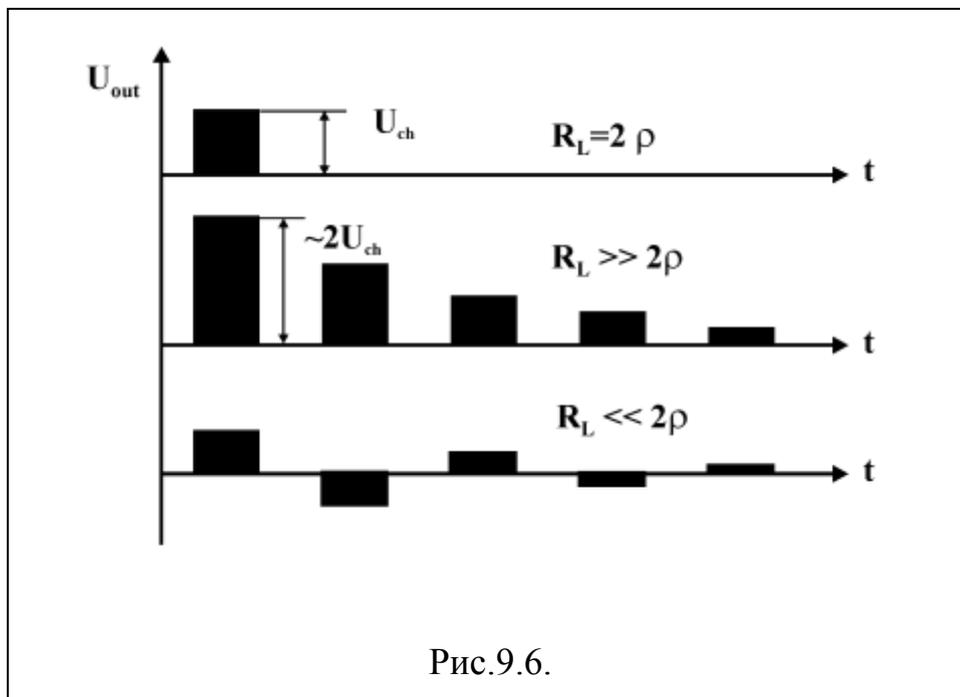


Рис.9.6.

Рекуррентный анализ в общем виде, при $R_L \neq 2\rho$, как и для случая с обычной ФЛ, приводит к формуле, описывающей амплитуды последовательности импульсов, формируемых ДФЛ на произвольной нагрузке:

$$U_R^{(N)} = U_{ch} \frac{2}{(1 + 2\rho/R_L)} \left(\frac{1 - 2\rho/R_L}{1 + 2\rho/R_L} \right)^{N-1}. \quad (9.48)$$

Эти характерные режимы приведены на Рис.9.6.

10. Преобразователи импульсов в системах с длинными линиями.

При создании мощных источников излучения радиочастотного диапазона представляют интерес генераторы высоковольтных биполярных импульсов. Такие видеоимпульсы, похожие по форме на один период синусоиды, при излучении с помощью специальных антенн по сравнению с униполярными энергетически более выгодны из-за особенности их спектра, максимум которого сдвинут в область высоких частот.

10.1. Пассивный биполярный преобразователь.

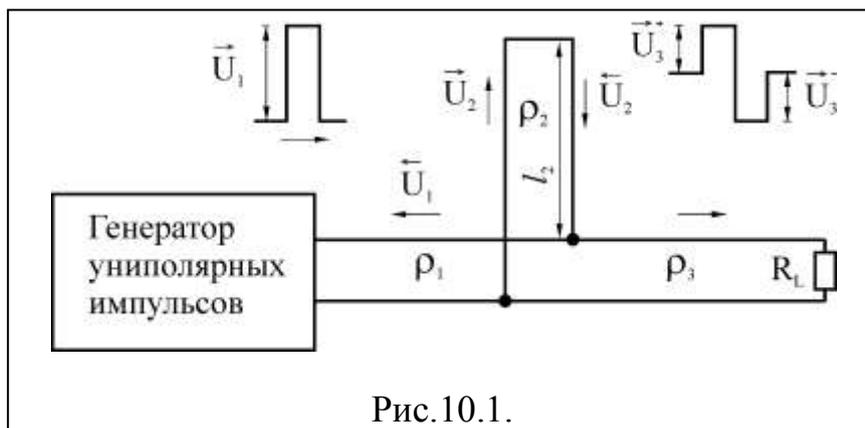


Рис.10.1.

В импульсной технике традиционный способ формирования биполярных импульсов основан на применении короткозамкнутого отрезка коаксиальной или полосковой линии (КЗ-шлейфа), с помощью которого преобразуется квазипрямоугольный импульс, генерируемый одиночной формирующей линией или ДФЛ. Схема такого устройства показана на рис.10.1. Шлейф включен по Т-образной схеме в рассечку выходного тракта генератора униполярных импульсов. Рассмотрим работу данного устройства.

Униполярный импульс с амплитудой \bar{u}_1^*) и длительностью τ_p , генерируемый внешним генератором (ФЛ; ДФЛ), передается по линии ρ_1 к точке параллельного соединения линий ρ_2 и ρ_3 . Линия ρ_2 (собственно шлейф) замкнута накоротко на конце и имеет коэффициент отражения по напряжению $R = -1$. Длина шлейфа (l_2) определяется по формуле:

$$l_2 = \frac{c\tau_p}{2\sqrt{\varepsilon}}. \quad (10.1)$$

Преобразователь работает следующим образом. Исходный импульс \bar{u}_1 трансформируется в точке соединения $\rho_1 \rightarrow \rho_{23}$ с коэффициентом амплитудного преобразования T_{23} . Таким образом, равные по амплитуде импульсы \bar{u}_2 и \bar{u}_3^+ направляются в линии ρ_2 и ρ_3 :

$$\bar{u}_2 = \bar{u}_3^+ = \bar{u}_1 T_{23}. \quad (10.2)$$

После отражения импульса \bar{u}_2 от короткозамкнутого конца шлейфа (линии ρ_2), его полярность инвертируется ($R = -1$). То есть, уже инвертированный отраженный импульс \bar{u}_2 ($\bar{u}_2 = -\bar{u}_2$) возвращается в точку параллельного соединения линий ρ_1 и ρ_3 . Здесь он трансформируется с коэффициентом амплитудного преобразования T_{13} . В результате импульсы \bar{u}_1 и \bar{u}_3^- передаются по линиям ρ_1 и ρ_3 , соответственно.

$$\bar{u}_1 = \bar{u}_3^- = -\bar{u}_2 T_{13}. \quad (10.3)$$

Выполнение соотношения (10.1) означает, что импульсы \bar{u}_3^+ и \bar{u}_3^- следуют по линии ρ_3 один за другим без задержки и образуют требуемый

*) Здесь и ниже индексы " \rightarrow " и " \leftarrow " показывают направления передачи импульса: прямое или обратное.

биполярный импульс, передаваемый к нагрузке. Сравнивая (10.2) и (10.3) получим:

$$\bar{u}_3^- = -\bar{u}_3^+ T_{13}. \quad (10.4)$$

Запишем явные выражения коэффициентов трансформации амплитуды импульсов (T_{23} и T_{13}) на соответствующих скачках волнового сопротивления тракта в точке сочленения линий. Для этого введем обозначения:

$$\rho_2 = \beta \rho_1; \quad \rho_3 = \gamma \rho_1; \quad \alpha_{23} = \rho_{23} / \rho_1; \quad \alpha_{13} = \rho_{13} / \rho_1. \quad (10.5)$$

Здесь: $\rho_{23} = \rho_2 \rho_3 / (\rho_2 + \rho_3)$; $\rho_{13} = \rho_1 \rho_3 / (\rho_1 + \rho_3)$. Таким образом:

$$T_{23} = \frac{2\alpha_{23}}{(1 + \alpha_{23})} = \frac{2\gamma\beta}{(\gamma + \beta + \gamma\beta)}; \quad (10.6)$$

$$T_{13} = \frac{2\alpha_{13}}{(1 + \alpha_{13})} = \frac{2\gamma}{(\gamma + \beta + \gamma\beta)}. \quad (10.7)$$

Положив для определенности $\bar{u}_1 = 1$, заметим, что формула (10.6) дает значение амплитуды неинвертированного лепестка биполярного импульса (рис.10.2), а выражение (10.7) представляет соотношение амплитуд инвертированного и неинвертированного лепестков (рис.10.3). Наложив условие амплитудной симметрии $|\bar{u}_3^+| = |\bar{u}_3^-|$ (то есть, полагая $T_{13} = 1$) получим зависимость $\beta = \beta(\gamma)$, представленную на рис.10.4:

$$\beta = \gamma(1 + \gamma). \quad (10.8)$$

Соотношение (10.8) описывает ситуацию, когда выходной импульс симметричен и сочленение линий $\rho_2 \rightarrow \rho_{13}$ согласовано. В этом варианте отсутствуют отражения, которые в общем случае могут следовать непосредственно за сформированным биполярным импульсом.

На практике выходное сопротивление генератора униполярных импульсов обычно задано, то есть волновое сопротивление согласованной

с ним передающей линии ρ_1 фиксировано. Поэтому критериями выбора рабочей точки на зависимости (рис.10.4) являются приоритет значения γ (то есть величины ρ_3) и (или) энергетической эффективности преобразователя. Для принятого выше случая с $\bar{u}_1 = 1$ энергетическая эффективность пассивного преобразователя запишется в виде:

$$\eta = \frac{1}{\gamma} \left[\left(u_3^+ \right)^2 + \left(u_3^- \right)^2 \right]. \quad (10.9)$$

Для случая амплитудной симметрии (10.9) трансформируется в формулу:

$$\eta_s = \frac{2\gamma}{(1+\gamma)^2}. \quad (10.10)$$

Соответствующая зависимость на рис.10.5 показывает, что в случае симметрии разнополярных лепестков импульса **не более 50% энергии исходного униполярного импульса** может быть передано биполярным импульсом в нагрузку. Заметим, что уровень эффективности преобразования $\eta_{max} = 0.5$ соответствует практически-важному случаю ($\gamma = 1$), когда волновые сопротивления передающих линий ρ_1 и ρ_3 идентичны, то есть выходное волновое сопротивление остается неизменным. В этой ситуации $\beta = 0.5$ ($\rho_2 = 0.5\rho_1$), а **биполярный импульс имеет полный размах амплитуды, равный амплитуде исходного униполярного импульса.**

Несомненным преимуществом пассивного биполярного преобразователя является **стабильность формы** выходного импульса, полностью определяемая характеристиками генератора исходных униполярных импульсов. Другое преимущество заключается в возможности плавной регулировки длительности, что достигается согласованным изменением электрической длины короткозамкнутого шлейфа и длительности исходного униполярного импульса.

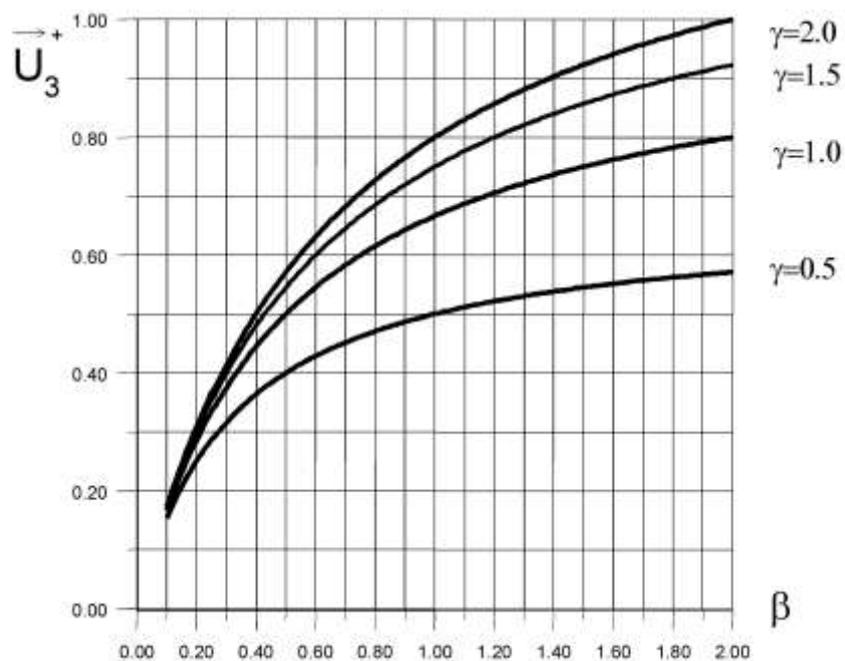


Рис.10.2. Нормированная амплитуда неинвертированного лепестка формируемого пассивным преобразователем для различных соотношений (γ) входного и выходного импедансов устройства.

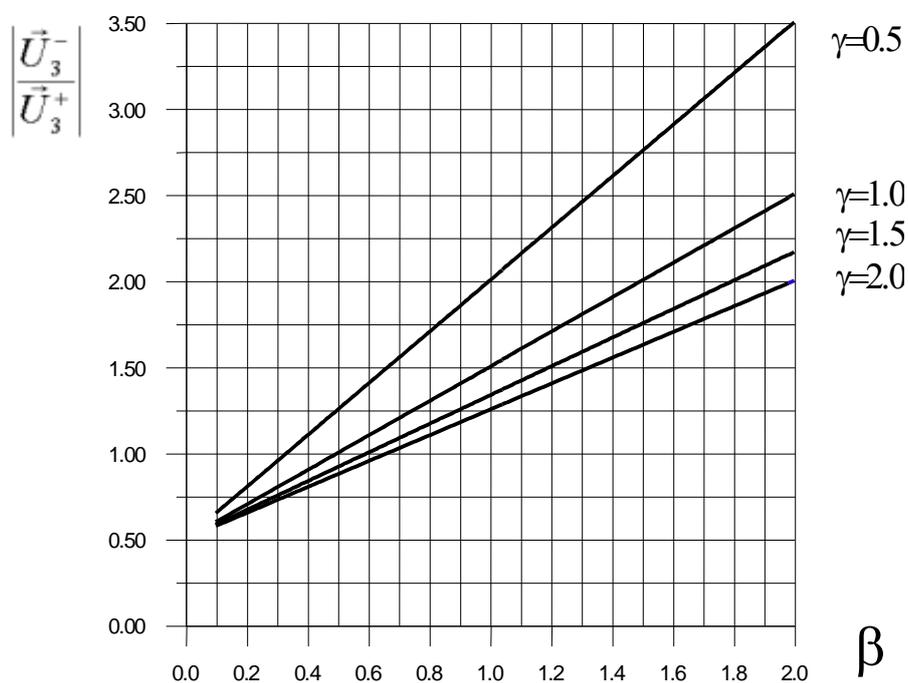


Рис. 10.3. Отношение амплитуд инвертированного и неинвертированного лепестков для различных соотношений (γ) входного и выходного импедансов устройства.

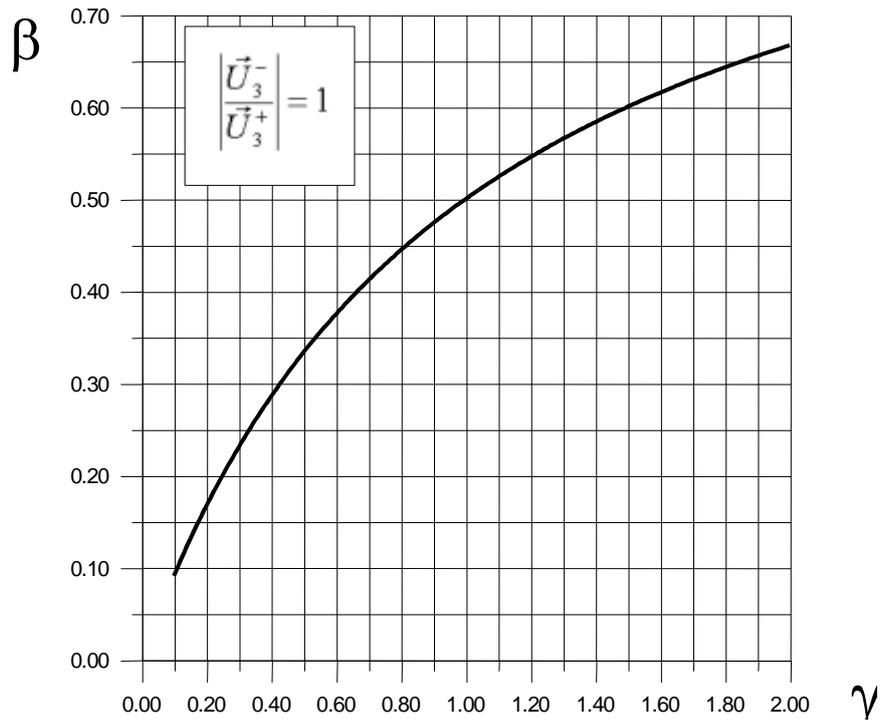


Рис.10.4. Соотношение импедансов линий пассивного формирователя, обеспечивающее формирование амплитудно-симметричного биполярного импульса.

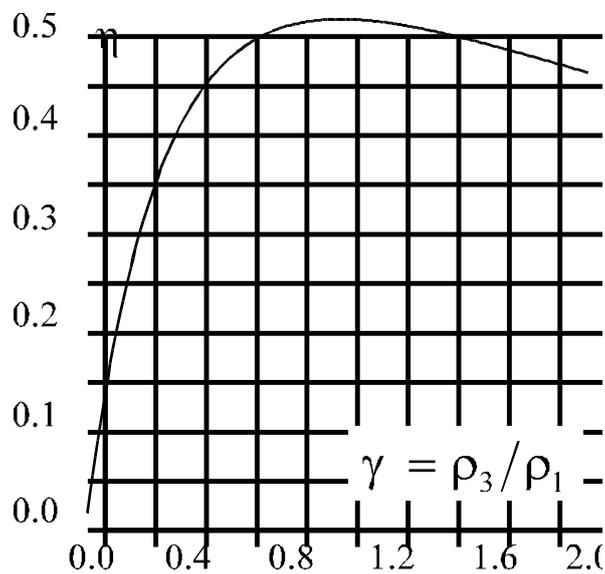


Рис.10.5. Эффективность биполярного преобразователя с короткозамкнутым шлейфом в зависимости от соотношения волновых сопротивлений выходной и входной передающих линий, рассчитанная для случая амплитудной симметрии разнополярных лепестков.

10.2. Активный биполярный преобразователь.

Известен более эффективный способ формирования биполярного импульса увеличенной амплитуды. Его принцип, представленный на рис.10.6,а, основан на одновременной коммутации двух ключей, расположенных на противоположных концах одиночной формирующей линии.

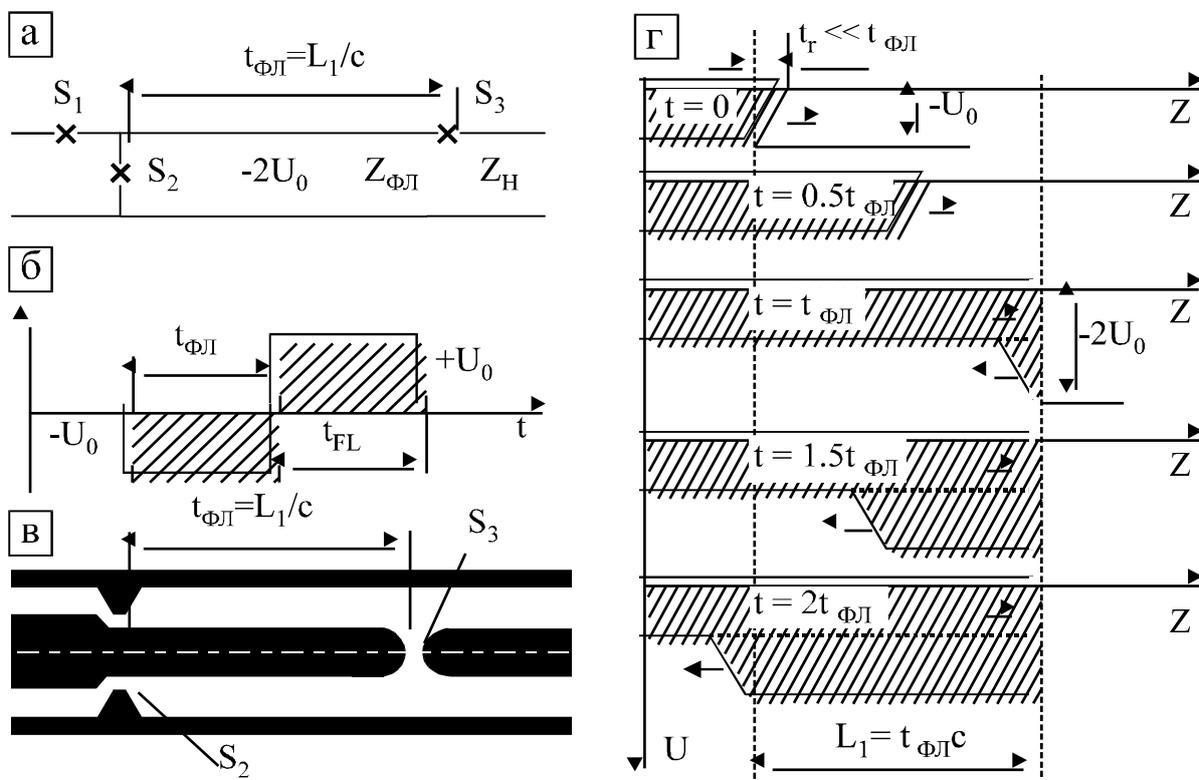


Рис.10.6. Схема генератора на основе коаксиальной формирующей линии и двух *одновременно* срабатывающих разрядников S_2 , S_3 (а), генерирующего биполярный импульс (б). Компоновка биполярного формирователя с зарядкой коаксиальной формирующей линии в режиме бегущей волны (в). Динамика прохождения волны напряжения до момента пробоя разрядников при $t=2t_{\text{ФЛ}}$ (г).

Линия, заряженная до напряжения $-2U_o$ (допустим, в режиме бегущей слева волны напряжения $-U_o$ от согласованного ФЛ-генератора при замыкании ключа S_1), коммутируется ключом S_3 на выходе на согласованную нагрузку. Таким образом, из-за предпробойного удвоения напряжения при разомкнутом S_3 на нагрузке формируется неинвертированный импульс с амплитудой $-U_o$ и длительностью $t_{ФЛ}$, равной времени однократного прохода волны вдоль линии. Противоположный конец линии при коммутации второго ключа S_2 закорачивается, что обеспечивает формирование инвертированного импульса. Он поступает на нагрузку с задержкой $t_{ФЛ}$, имеет такую же длительность и амплитуду U_o (рис. 10.6,б). Очевидными требованиями для данного устройства является малость времени коммутации ключей S_2, S_3 и разброс этого времени по сравнению с $t_{ФЛ}$. Именно одновременность включения коммутаторов S_2, S_3 определяет временную симметрию биполярного импульса. В высоковольтных (>100 кВ) схемах ключи S_2, S_3 – это, обычно, - искровые разрядники.

Когда требуется формировать импульсы наносекундного диапазона или короче, то *при статической или относительно медленной импульсной зарядке* формирующей линии приемлемая точность включения разрядников в схеме на рис. 10.6,а может быть обеспечена только при синхронном управляемом запуске S_2 и S_3 . С увеличением скорости зарядки ФЛ (допустим, в режиме бегущей волны, импульсом напряжения с наносекундным фронтом) временной разброс включения неуправляемого коммутатора уменьшается. Это уже позволяет практически формировать биполярные импульсы с длительностями разнополярных лепестков (~ 1 нс и более), используя, при этом, неуправляемые разрядники S_2 и S_3 .

Как известно, в наносекундном диапазоне длительностей геометрическая длина даже достаточно высоковольтной формирующей линии может в несколько раз превышать ее диаметр. В этом случае базовая принципиальная схема генератора биполярных импульсов (рис. 10.6,а), представляющая модификацию известной схемы Введенского, при типичном волновом сопротивлении линии в десятки Ом допускает топологическое преобразование, где разрядники S_2 и S_3 объединены, как это показано на рис.10.7. Здесь уже практически сложно подключить источник, обеспечивающий зарядку в режиме бегущей волны. Но это уже и не требуется, так как скорость зарядки емкостного накопителя (ФЛ) может быть снижена в той степени, которая позволяет обеспечить время коммутации разрядника по величине, как минимум, вдвое меньшее электрической длины формирующей линии. Естественно, что понятие стабильности биполярного генератора при использовании такого объединенного разрядника относится только к разбросу амплитуд от импульса к импульсу.

С переходом в диапазон длительностей биполярных импульсов до 1 нс, согласно приведенным на рис. рис.10.7 схемам с объединенным разрядником, электрические длины соосных формирующих линий будут различаться примерно на величину порядка среднего радиуса. Это связано с необходимостью обеспечить достаточный изоляционный зазор (как в радиальном, так и в осевом направлении), выдерживающий без пробоев зарядное напряжение ФЛ. Это обстоятельство, а также трудности подвода зарядного импульса к формирующей линии, на практике чрезвычайно осложняют реализацию конструкции с одним разрядником для формирования биполярных импульсов с длительностью ~ 1 нс и короче.

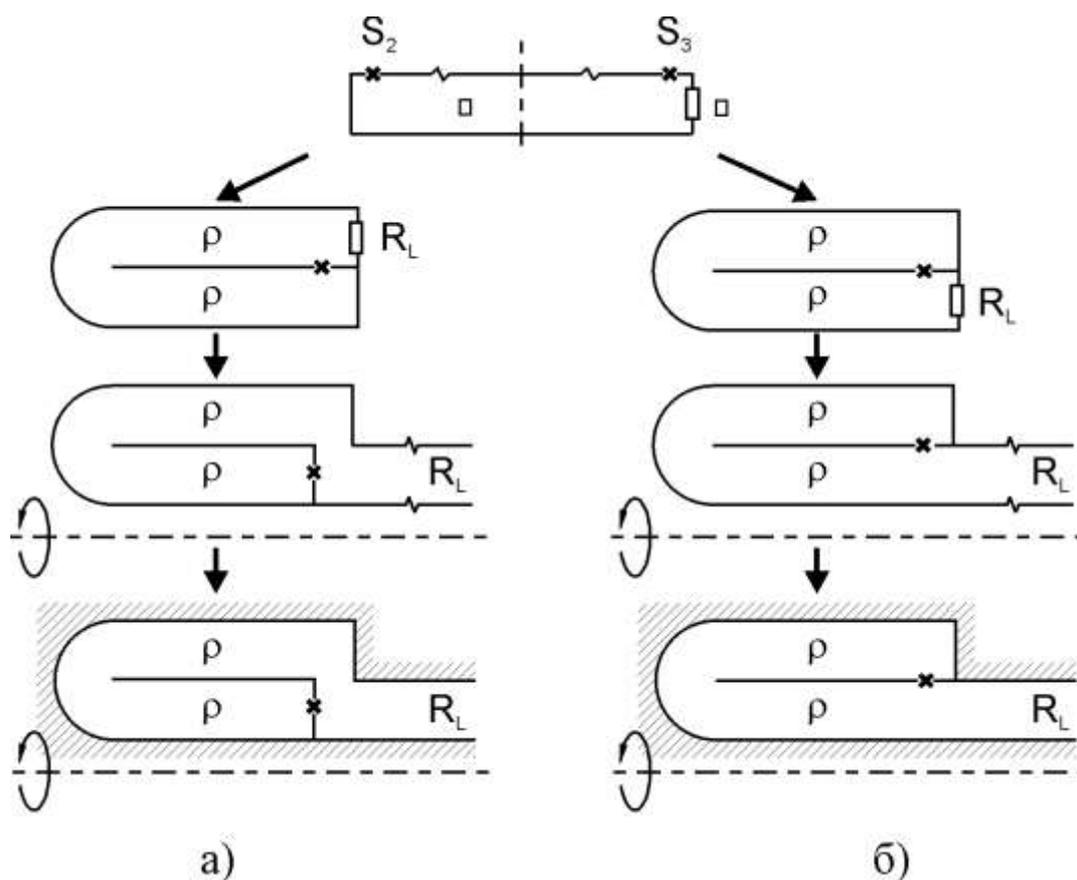


Рис.10.7. Варианты топологического преобразования схемы генератора биполярных импульсов, позволяющего объединить два разрядника.

10.3. Компрессия импульсов в режиме бегущей волны.

Как уже упоминалось в параграфе 6.3, в системах формирования мощных коротких наносекундных импульсов с помощью емкостных накопителей энергии эффективно используется схема, представленная на рис.6.6 (см., также рис.10.8,а). При этом в качестве первичного конденсатора C_1 может выступать генератор Маркса или Фитча (системы с сосредоточенными емкостями) либо формирующие линии с трансформаторной зарядкой. В качестве выходного (заряжаемого) накопителя C_2 обычно используется достаточно короткая ФЛ, но, как

правило, с низким волновым сопротивлением. Последнее условие обеспечивает равенство C_1 и C_2 . Для общности назовём C_2 короткой формирующей линией. В случае использования двух ФЛ схема рис.10.8,а может быть представлена, как это выглядит на рис.10.8,б. При этом, линия C_1 с волновым сопротивлением ρ_1 может быть и передающей линией, по которой слева распространяется зарядный импульс напряжения, реально возникающий в схеме на рис.10.8,б после «быстрого» замыкания ключа.



Рис.10.8. Схема блока компрессии энергии наносекундных импульсов.

а - классическая схема с сосредоточенными параметрами; б- та же схема в представлении длинных линий. C_1 - первичная ФЛ; C_2 - короткая ФЛ; L - зарядная индуктивность; S_1 и S_2 - коммутаторы первичной ФЛ и короткой ФЛ, соответственно.

Как и в случае (а), есть два режима использования схемы (б):

1. Сжатие импульса по времени ($\tau_2 \ll \tau_1$) с высокой эффективностью преобразования энергии, но без повышения напряжения в выходном емкостном накопителе. В этом случае $k = (C_2/C_1) \approx 1$; $\rho_2 = \rho_1(\tau_2/\tau_1)$.

2. Увеличение напряжения накопителя C_2 , в идеале - до удвоения. В этом режиме $k = (C_2/C_1) \ll 1$, а эффективность преобразования энергии $\eta = 4k/(1+k)^2 \rightarrow 0$ (рис.10.9).

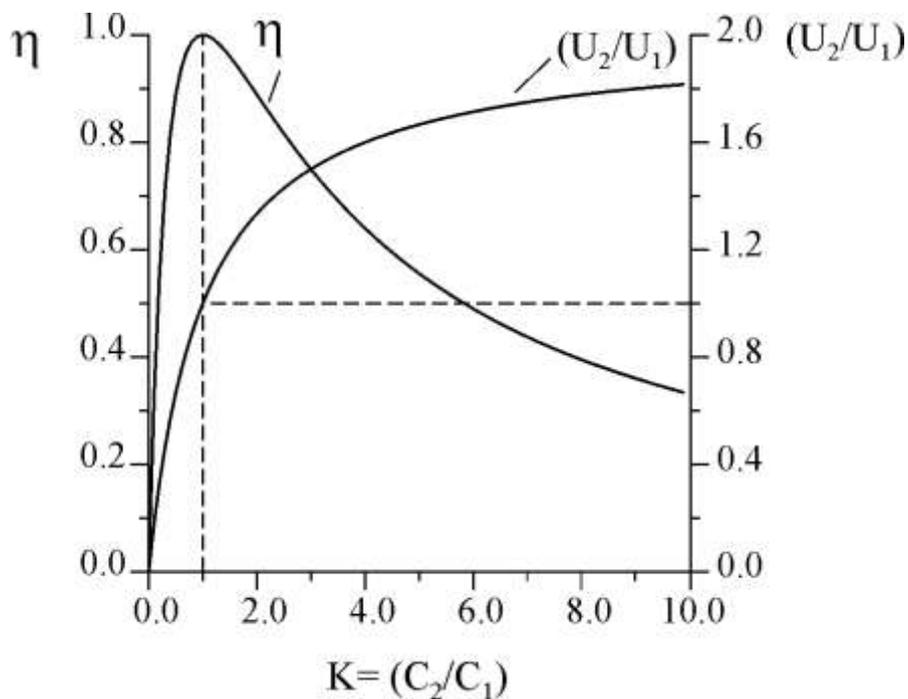


Рис.10.10. Эффективность трансформации энергии и умножение напряжения в цепи с сосредоточенными параметрами.

Оба варианта наиболее полно реализуются, если характерное время зарядки накопителя C_2 , равное $\tau_{ch} \approx \pi[LC_1k/(1+k)]^{1/2}$, удовлетворяет условию $\tau_{ch} \gg \tau_1$. Последнее требование означает, что в процессе зарядки обе формирующие линии можно рассматривать в виде сосредоточенных емкостей.

Рассмотрим режим компрессии энергии при передаче энергии из C_1 в C_2 в случае $\tau_{ch} \approx \tau_1$ в режиме бегущей волны. Зарядный импульс длительностью τ_1 с крутым фронтом (τ_r) из формирующей линии C_1 с волновым сопротивлением ρ_1 после замыкания ключа S_1 по отрезку

согласованной передающей линии через индуктивность L поступает в разомкнутую на конце короткую формирующую линию C_2 с волновым сопротивлением $\rho_2 = \rho_1$. Понятно, что при последнем условии для осуществления компрессии импульса в общем случае должно выполняться $\tau_2 < \tau_1$.

В волновом режиме передачи импульса в C_2 и при условии $\tau_{ch} \approx \tau_1$ оправдано представление индуктивности L в виде отрезка однородной линии с высоким волновым сопротивлением Z^1 , так как в общем случае $Z \propto \sqrt{L/C}$. Для определенности будем считать, что электрические длины линий Z и ρ_2 идентичны ($\tau_2 = \tau_Z = \tau$), а $\tau_1 = 2n\tau$, где $n = 1, 2, \dots$. Таким образом, в нашем случае справедливо соотношение: $\tau_r \ll \tau < \tau_1$.

Отметим, что приведенная на рис.10.8,б схема представляет типичную передающую линию с дискретной неоднородностью. В случае бесконечно-длинной выходной линии ρ_2 ($\tau_2 \gg \tau_r; \tau_Z$) данная схема проанализирована при рассмотрении искажения идеального фронта передаваемого импульса в параграфе 7.8. Это сделано с помощью методики расчета кольцевых цепей². В нашем случае схема (рис.10.8,б) до момента замыкания ключа S_2 содержит две последовательных кольцевых цепи, образованных участками линий Z и ρ_2 . Режимы работы кольцевых цепей представлены на диаграммах, рис.10.10.

¹ На практике обычно используется не коаксиальная, а спиральная линия, имеющая существенно меньшую длину.

² Смотри, например: Моругин Л.А., Глебович Г.В. Наносекундная импульсная техника. // М: "Сов. Радио", 1964, 623 с.

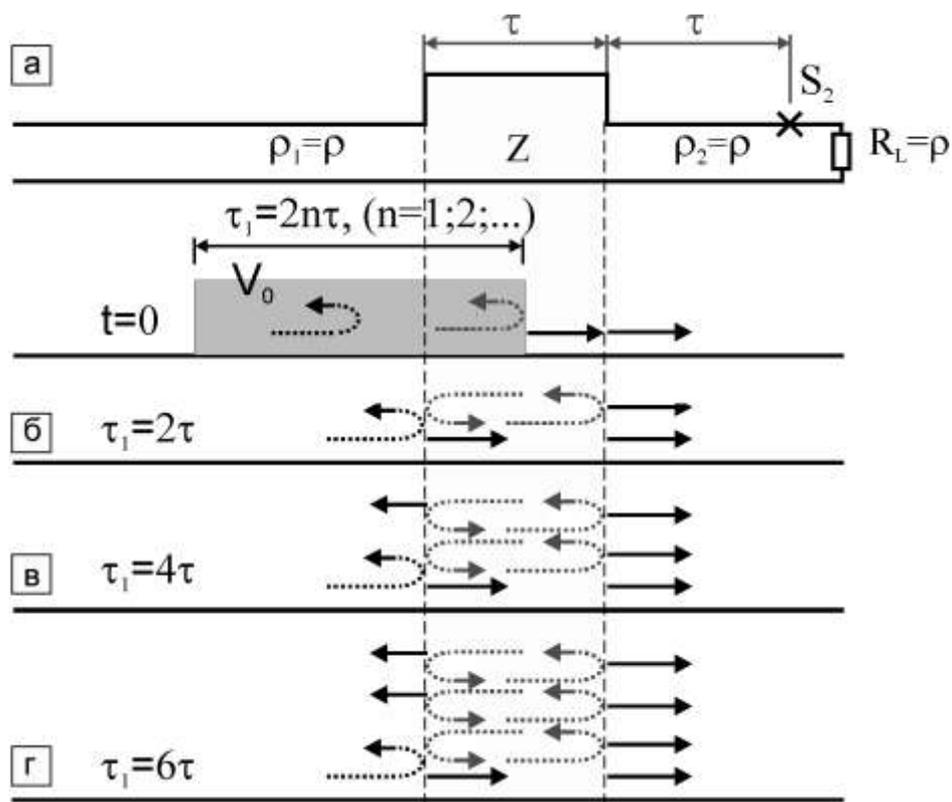
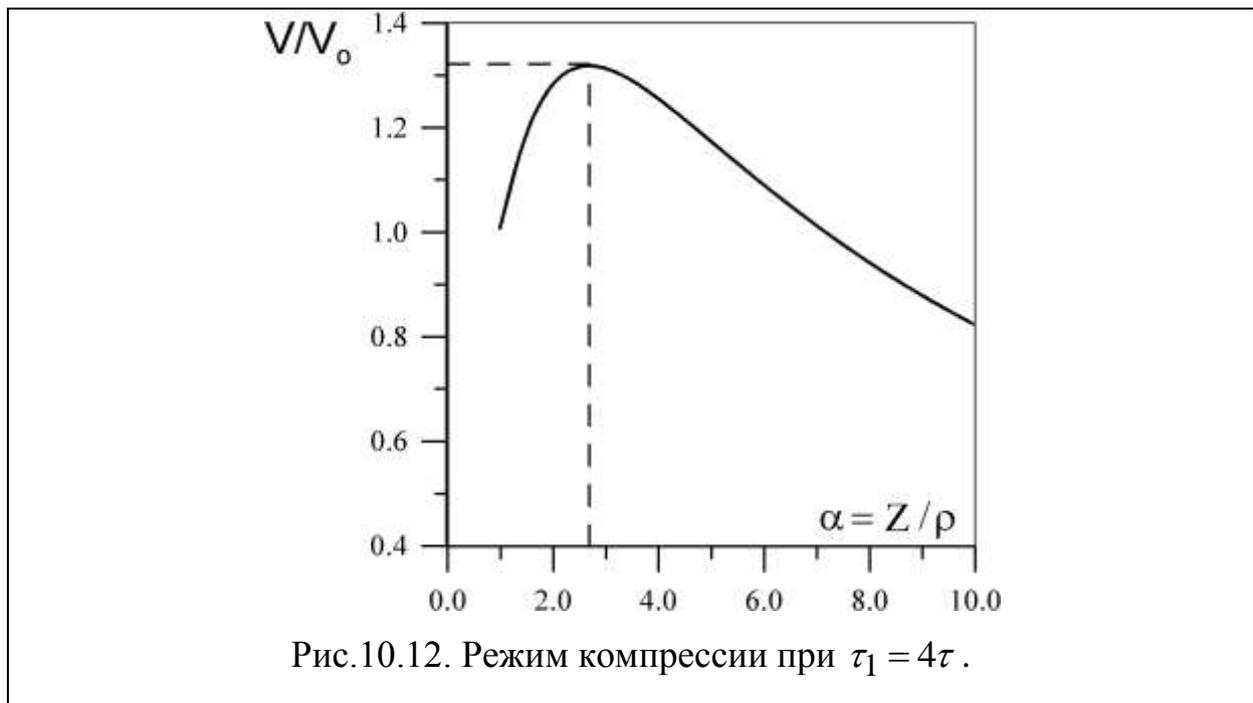


Рис.10.11. Процессы в кольцевых цепях системы компрессии энергии с бегущей волной.

Пока справедливо условие $\tau_1 \leq 2\tau$, наличие временной задержки в цепи Z , равной 2τ , делает суммирование напряжения в линии ρ_2 (а следовательно, и увеличение амплитуды напряжения накопителя (C_2)) невозможным (рис.10.10,б). Ситуация меняется, если импульс наносекундного драйвера вдвое длиннее: $\tau_1 = 4\tau$ (рис.10.10,в). В таком режиме в линии ρ_2 , начиная с момента $t = 2\tau$ и вплоть до включения выходного коммутатора S_2 (в идеале - при $t = 4\tau$), обеспечивается суммирование амплитуд трех волн напряжения: две волны представляют отражения исходной волны, совершившие полные обороты в линиях Z и ρ_2 . Третья волна представляет последнюю часть исходной волны, прошедшую из линии ρ_1 в Z , а затем - в ρ_2 :

$$\left(U_{\rho_2}^{max} / U_0 \right) = \frac{4\alpha}{(1+\alpha)^2} \sum_{n=1}^3 \left(\frac{\alpha-1}{\alpha+1} \right)^{(n-1)}. \quad (10.11)$$

В данном выражении принято обозначение $\alpha = Z/\rho$, которое в нашем анализе всегда больше единицы. На рис.10.11 представлен расчет по формуле (10.11), показывающий наличие максимума нормированной амплитуды напряжения при значении $\alpha \approx 2.7$. Амплитуда зарядной волны напряжения полагалась $U_0 \equiv 1$. Подсчет баланса энергии импульсов показывает, что в режиме максимальной зарядки, когда $\left(U_{\rho_2}^{max} / U_0 \right) = 1.32$, в линии ρ_2 запасается 87% энергии исходного зарядного импульса.



Положив длительность импульса равной $\tau_1 = 6\tau$ (рис.10.10,в) и проведя еще один цикл суммирования амплитуд импульсов в линиях Z и ρ_2 , для напряжения в выходной линии можно получить коэффициент умножения, близкий к 1,5 (рис.10.12). Достигается этот режим при $\alpha \approx 5.1$, однако энергетическая эффективность зарядки в этом режиме снижается до 75%.

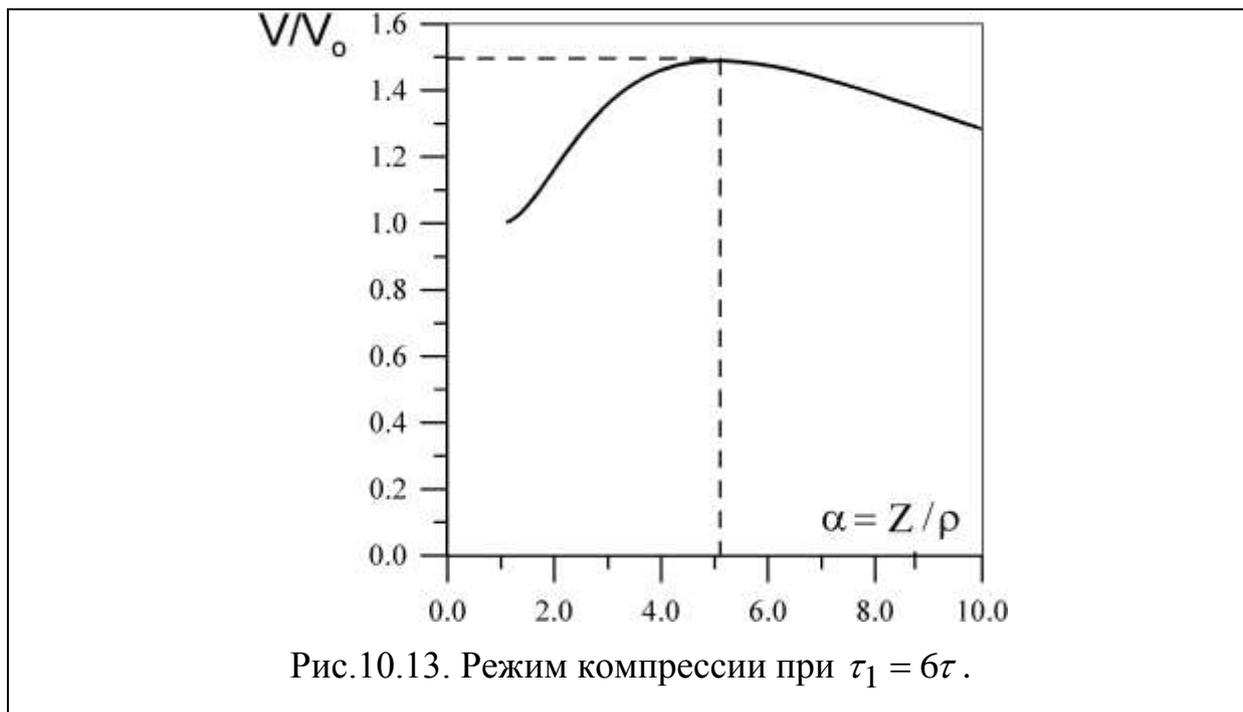


Рис.10.13. Режим компрессии при $\tau_1 = 6\tau$.

Как видно, увеличение оптимального значения α происходит согласованным образом с ростом требуемой длительности исходного импульса и падением эффективности зарядки. В терминологии схемы с сосредоточенными параметрами (рис.10.8,а) это означает не что иное, как увеличение индуктивности L до тех значений, пока не будет заведомо выполнено условие длительной зарядки короткой линии ρ_2 , позволяющей в пределе обеспечить удвоение напряжения в выходном емкостном накопителе C_2 , однако при низкой эффективности, то есть, - при $k = (C_2/C_1) \ll 1$.

11. Высоковольтные коммутаторы.

Как это следует из материала предыдущих разделов (начиная со схемы на рис.1.2), любое устройство, формирующее импульсы тока и напряжения, содержит в своём составе ключи (коммутаторы), которые являются промежуточными элементами между накопителями энергии, сопряженными с ними устройствами трансформации тока/напряжения и нагрузками. Выше, за редким исключением, мы полагали коммутатор идеальным элементом. Это вполне оправданный подход, поскольку обычно коммутатор представляет два металлических электрода, разделенных средой, имеющей резкую зависимость тока от приложенного напряжения. Действительно, основное требование, предъявляемое к коммутирующим устройствам мощных импульсных генераторов, – это переход «рабочей среды» коммутатора из непроводящего состояния в состояние высокой проводимости (или наоборот) *за время, существенно меньшее длительности генерируемого импульса.*

Таким образом, для рассматривавшихся ранее систем зарядки и вывода энергии высоковольтных накопителей энергии соответствующие времена срабатывания коммутаторов должны лежать в диапазонах длительностей 10^{-6} - 10^{-9} с, а в ряде случаев - вплоть до 10^{-10} с.

11.1. Классификация коммутаторов.

Ниже приводится диаграмма, представляющая вариант систематизации коммутаторов, используемых для создания мощных импульсных генераторов. На самом деле - это упрощённая классификация, что становится понятным хотя бы на примере коммутаторов с твердотельной рабочей средой, которые могут функционировать за счёт электроразрядных процессов в диэлектриках (1), при коммутации

полупроводниковых структур (2) и изменения магнитных свойств ферромагнетиков (3). В первом случае (пробой; электрический взрыв) мы имеем дело с принципиально однократным процессом. Напротив, режимы коммутации в полупроводниках отличаются стабильной и многократной воспроизводимостью. При этом возможны режимы внешнего инициирования (только запуск или полное управление) различными способами – полевого, инжекционное или радиационное воздействие. Реакторы с ферромагнитными сердечниками – это нелинейные компоненты электрических контуров, выполняющие функцию переключающих элементов.

1. Рабочая среда				
твердотельные	жидкостные	газовые	плазменные	вакуумные

2. Тип коммутационного процесса	
закрывающие	размыкающие

3. Режим включения		
неуправляемый	внешний запуск	полное управление

4. Режим работы		
однократный	редкие включения	периодическое включение

5. Диапазон напряжений			
менее 1 кВ	1 -100 кВ	100 -1000 кВ	более 1000 кВ

6. Диапазон коммутируемых энергий			
менее 10 Дж	10 -1000 Дж	1-100 кДж	более 100 кДж

Что касается диапазона напряжений и коммутируемых энергий, то приведённая градация весьма условная, и определяется, в основном, массо-габаритными показателями систем: от компактных до весьма крупных.

11.2. Особенности использования диэлектриков.

Проблема обеспечения условий быстрой коммутации по существу близка, но требует решения вопросов, противоположных задачам повышения энергоемкости и мощности высоковольтного импульсного генератора. Это является результатом очевидного противоречия между требуемой высокой электрической прочностью изоляции накопителя энергии и быстродействием коммутатора. В качестве примера на рис.11.1 показаны упрощённые конструктивные схемы высоковольтных генераторов на основе одиночной коаксиальной формирующей линии (а) иДФЛ (б), где изоляция емкостного накопителя и рабочая среда искрового коммутатора – один и тот же диэлектрик (газ или жидкость). Понятно, что диэлектрик должен обеспечивать высокую пробивную электрическую прочность в изоляционном зазоре (d), в том числе, и в области, непосредственно примыкающей к коммутатору (S). Коммутатор, наоборот, должен при достижении некоторого критического зарядного напряжения гарантированно и быстро включиться.

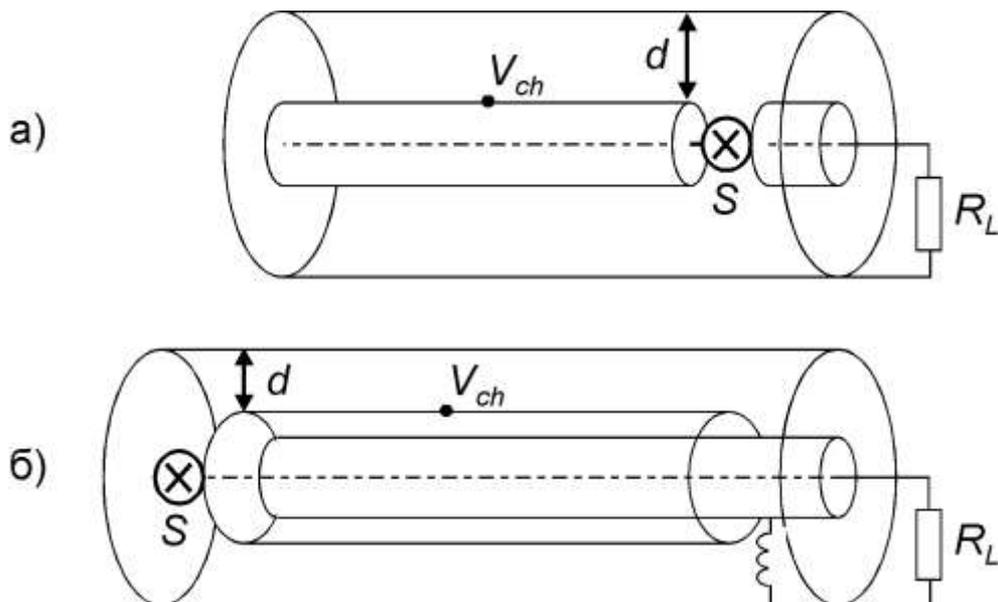


Рис.11.1

Каким же образом разрешается данное противоречие? Разумеется, приходится учитывать тот факт, что диэлектрик в высокопотенциальном промежутке будет пробит, если подъём напряжения обеспечит некоторое критическое поле. Если же поле несколько ниже порога самопробоя, то включить коммутатор можно внешним воздействием, которое обеспечит локальное усиление поля именно между электродами коммутатора (искажение поля при электрическом запуске) или созданием проводящей среды в этой области (фотоионизация импульсом излучения, плазма лазерной искры, пучок заряженных частиц). При всех этих вариантах приходится предпринимать специальные меры, снижающие напряжённость поля на потенциальном электроде накопителя и, особенно, – вблизи разрядного промежутка, где, как правило, имеют место эффекты усиления поля на геометрических неоднородностях и кромках электродов, подсветка от искры в коммутаторе, и т.п.

Следовательно, один и тот же диэлектрик в высоковольтном генераторе может решать противоположные задачи, если корректно учесть следующие обстоятельства и факторы:

- Величину электрического поля;
- Время воздействия высокого потенциала;
- Агрегатное состояние, например пузырьки паров и газа в жидкости;
- Химический состав среды, например, активные примеси;
- Материал электродов;
- Состояние поверхности электродов;
- Внешние иницирующие воздействия;
- Статистические эффекты.

11.3. Газовые разрядники.

подавляющее большинство генераторов мощных наносекундных импульсов имеет в качестве выходных высоковольтных коммутаторов искровые газовые разрядники. Большое влияние на формирование импульсов в таких генераторах оказывают процессы, происходящие в плазме разрядного промежутка. При этом:

- начальная стадия разряда, от момента приложения импульса до начала образования проводящей плазмы, определяет время и стабильность срабатывания разрядника;
- скорость процесса образования в промежутке плазмы с высокой проводимостью определяет крутизну фронта импульса (чем она выше, тем короче фронт импульса);
- предельная частота повторения работы импульсного генератора определяется временем восстановления электрической прочности среды разрядного промежутка.

Общие сведения о механизмах газового разряда

Существует два принципиально различных типа разряда: несамостоятельный и самостоятельный.

Несамостоятельным разрядом принято называть ток в газе, протекающий в условиях воздействия внешней ионизации, устранение которой приводит к прекращению тока.

Для зажигания самостоятельного разряда к электродам нужно приложить некоторое предельное напряжение, зависящее от внешних условий: давления и сорта газа, конфигурации электродов, длины зазора, внешнего облучения и т.д.

Таким предельным значением считается статическое пробивное напряжение U_c . Если достаточно медленно повышать разность

потенциалов на электродах, то при $U = U_c$ скачком увеличивается ток, появляется видимое свечение в зазоре и спадает напряжение на электродах, поскольку сопротивление разрядного промежутка становится сравнимым с внешним сопротивлением электрической цепи. Под достаточно медленным подъемом напряжения подразумевают, что характерное время его роста существенно больше времени развития ионизационных процессов в промежутке, или времени установления предпробойного тока.

Другая ситуация имеет место при импульсном пробое. Здесь к электродам прикладывается импульс напряжения, причем в идеализированном случае длительность фронта импульса должна быть намного меньше, чем время развития разряда (Рис.11.2). Ясно, что в таком случае разряд может зажигаться при напряжениях, превышающих U_c . Перенапряжение характеризуется коэффициентом $k_{п}$, которое вводится как отношение амплитуды импульса U_a к пробивному напряжению U_c ($k_{п} = U_a / U_c$). При увеличении $k_{п}$ время зажигания разряда уменьшается. Для реализации пробоя сильно перенапряженных промежутков нужно подавать на электроды импульсы с фронтом порядка наносекунды и менее.

При импульсном пробое газов между моментом приложения напряжения к промежутку и началом пробоя, которое обычно фиксируется по резкому спаду напряжения, проходит некоторое время, называемое временем

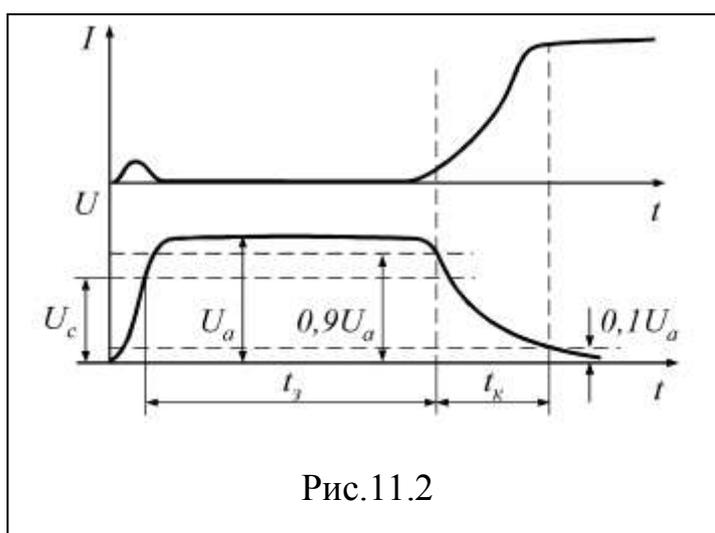


Рис.11.2

запаздывания t_3 . Это время включает статистическое запаздывание и собственно время формирования разряда.

Статистическое время - это время появления инициирующего лавину электрона, и оно может быть уменьшено вплоть до нуля с помощью внешнего источника ионизации (подсветки). В отсутствие такового источника при импульсном пробое начальный электрон может появиться на катоде за счет:

- автоэлектронной эмиссии;
- эмиссии из тройных точек в зоне диэлектрических включений;
- взрывной электронной эмиссии, если есть условия её возникновения.

Если к промежутку приложено достаточно большое электрическое поле, разряд в газе начинается с появления хотя бы **одного инициирующего электрона**. Этот электрон будет двигаться в сторону анода и производить ударную ионизацию атомов и молекул газа. Если принять, что разряд происходит в однородном электрическом поле, то число электронов N_e через время t после появления первичных электронов

$$N_e = N_{e0}e^{\alpha x} = N_{e0}e^{\alpha v_e t}, \quad (11.1)$$

где $x = v_e t$ - длина пути, α - коэффициент ударной ионизации, v_e - скорость дрейфа электронов, N_{e0} - число начальных электронов.

Феномен, который образуется при числе электронов $N_{e0} = 1$, называется **электронной лавиной**. Каждому вновь образованному электрону в лавине соответствует ион. Ионы движутся в сторону катода, бомбардируют катод и вызывают вторичную эмиссию электронов. Скорость движения ионов значительно

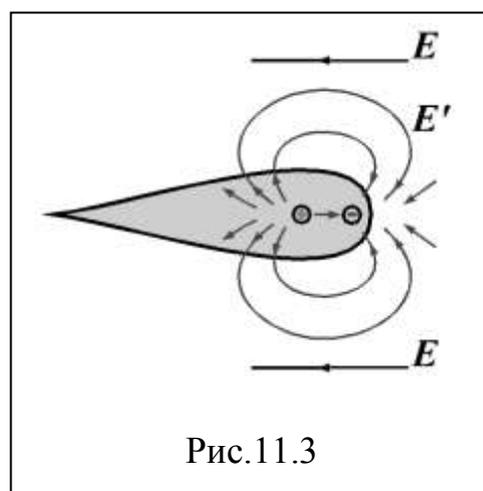


Рис.11.3

меньше скорости электронов, поэтому ионы в лавине будут создавать

объемный заряд, электрическое поле которого E' (Рис. 11.3) будет влиять на развитие лавины.

Поскольку поля E и E' направлены в противоположные стороны, то при $E' \sim E$ рост числа электронов в лавине практически прекратится. Количество электронов, при котором это происходит ($N_{кр}$), называется критическим. Длину лавины и время ее развития также называют критическими и обозначают соответственно через $x_{кр}$ и $t_{кр}$.

Типы разрядов классифицируются, исходя из соотношения между длиной промежутка d и критической длиной электронной лавины $x_{кр}$, при которой заряд одиночной лавины существенно искажает электрическое поле, приложенное к промежутку. Различают три типа разрядов. Это: ***таунсендовский, стримерный и многолавиный.***

Таунсендовский механизм Отличительным признаком таунсендовского разряда является то, что объемный заряд одиночной лавины не искажает электрического поля в промежутке, так как $x_{кр} > d$. В этом случае $\ln(N_{кр})/\alpha > d$. В таунсендовском механизме разряда основная роль отводится вторичной эмиссии электронов с катода и последовательной генерации лавин. Для теоретических расчетов и оценок часто пользуются полуэмпирической формулой Таунсенда для коэффициента ионизации:

$$\alpha = A p \exp(-B p / E), \quad (11.2)$$

где A и B - постоянные, которые подбираются на основании экспериментальных данных. В воздухе $A = 15 (\text{см} \times \text{Тор})^{-1}$, $B = 365 \text{ В} / (\text{см} \times \text{Тор})$ при $100 < E/p < < 800 \text{ В} / (\text{см} \times \text{Тор})$.

Стримерный разряд Если $x_{кр} < d$, то в процессе развития разряда доминирующую роль играет первичная лавина, которая переходит в стример, а затем в разрядный канал. Для существования стримерного

разряда необходимо, чтобы лавина излучала достаточное количество фотонов или убегающих электронов, способных ионизовать молекулы газа вблизи головки лавины. Условие существования стримерного разряда: $\ln(N_{ekp})/\alpha < d$.

Электронная лавина, достигнув анода, оставляет вблизи него ионы, заряд которых создает дополнительное поле с напряженностью E' . Возникшие вблизи анода фотоэлектроны движутся к положительному объемному заряду в поле с напряженностью $(E' + E)$, где E - напряженность поля, обусловленного приложенным напряжением U . Если E' достигает величины порядка E , то фотоэлектроны, достигнув положительного объемного заряда, успевают создать новые лавины, которые компенсируют заряд ионов, находящихся у анода, что приводит к созданию проводящей плазмы. Вновь возникшие под действием лавин фотоэлектронов положительные ионы и фотоэлектроны действуют так же, как описано выше, и по направлению к катоду быстро распространяется столб плазмы, называемый положительным стримером.

Многолавиный разряд Тип разряда, для которого $x_{kp} \ll d$ - это разряд с большим перенапряжением, названный многолавиным. При этом $\ln(N_{ekp})/\alpha \ll d$. В таком разряде на длине промежутка образуется много лавин критического размера.

При больших перенапряжениях на газовом промежутке время формирования разряда t_p переходит в область наносекундных и субнаносекундных времен. Импульсный разряд в этой области длительностей характеризуется тем, что время развития искры становится соизмеримым со временем протекания таких процессов, как рост лавин до критических размеров и высвечивание возбужденных молекул. Это накладывает отпечаток на пространственную структуру разряда,

статистику запаздывания, саму длительность процесса и т.д. Такой разряд имеет место при перенапряжении ≥ 1.5 . Характерной особенностью импульсного разряда в случае высокого значения E при высоком давлении газа и при больших токах является отсутствие контрагированного канала. Понятно, что пониженная индуктивность разрядного промежутка также делает такие коммутаторы наиболее подходящими для обострения импульсов мощных наносекундных генераторов.

На рис.11.4 приведена экспериментальная зависимость роста пробивной прочности воздуха при атмосферном давлении с укорочением длительности воздействия высокого напряжения на разрядный промежуток. Вполне понятно, что резкий рост электрической прочности на временах $< 10^{-9}$ с позволяет делать соответствующие высоковольтные передающие тракты и электродные системы весьма компактными. Что касается пикосекундных разрядников с высоким давлением газа, то они становятся миниатюрными.



12. Рекомендуемая литература

1. *Ландау Л.Д., Лившиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. // Москва «Наука», 1982 г.
2. *Моругин Л.А., Глебович Г.В.* Наносекундная импульсная техника. // М: “Сов. Радио”, 1964, 623 с.
3. *Месяц Г.А., Насибов А.С., Кремнев В.В.* Формирование наносекундных импульсов высокого напряжения. // М.: Энергия, 1970.
4. *Месяц Г.А.* Генерирование мощных наносекундных импульсов. // Москва «Советское радио», 1974 г.
5. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества. // Москва «Наука», 1976 г.
6. *Кремнев В.В., Месяц Г. А.* Методы умножения и трансформации импульсов в сильноточной электронике. // Новосибирск «Наука», 1987 г.
7. *Ерофеев Ю. Н.* Основы импульсной техники. // Москва «Высшая школа», 1979 г.
8. *Гоноровский И. С.* Радиотехнические цепи и сигналы. // Москва «Советское радио», 1963 г.
9. *Глебович Г.В., Ковалев И.П.* Широкополосные линии передачи импульсных сигналов. // М.: Сов. Радио. 1973. 224 с.
10. *Котов Ю.А., Лучинский А.В.* Усиление мощности емкостного накопителя энергии прерывателем тока на электрически взрывааемых проводниках // Физика и техника мощных импульсных систем / Под ред. Е.П. Велихова. М.: Энергоатомиздат, 1987.
11. *Ковальчук Б.М., Кремнев В.В.* Генераторы Аркадьева–Маркса для сильноточных ускорителей // Физика и техника мощных импульсных систем / Под ред. Е.П. Велихова. М.: Энергоатомиздат, 1987.
12. *Грехов И.В.* Импульсная коммутация больших мощностей полупроводниковыми приборами // Физика и техника мощных импульсных систем / Под ред. Е.П. Велихова. М.: Энергоатомиздат, 1987.
13. *Цукерман В.А., Тарасова Л.В., Лобов С.И.* Новые источники рентгеновских лучей // УФН. 1971. Т. 103, вып. 2. С.319–337.
14. *Лучинский А.В., Ратахин Н.А., Федущак В.Ф., Шепелев А.Н.* Многоцелевой импульсный генератор трансформаторного типа // Изв. вузов. Физика. 1997. № 12. С. 67–75.
15. *Коровин С.Д.* Трансформатор Тесла в сильноточных импульсно-

- периодических ускорителях. // Томск: ИСЭ СО РАН, Препринт № 47. 1988. 38 с.
16. *Мик Дж., Крэгс Дж.* Электрический пробой в газах / Пер. с англ. под ред. В.С. Комелькова. М.: Изд-во иностр. лит., 1960.
 17. *Ретер Г.* Электронные лавины и пробой в газах / Пер. с англ. под ред. В.С. Комелькова. М.: Мир, 1968.
 18. *Королев Ю.Д., Месяц Г.А.* Физика импульсного пробоя газов. // М.: Наука. 1991, 224 с.
 19. *Авилов Э.А., Юрьев А.Л.* Газонаполненные металлокерамические разрядники высокого давления. // ПТЭ, 2000, №2, с.78–81.
 20. *Месяц Г.А., Яландин М.И.* Пикосекундная электроника больших мощностей (Обзор) // УФН, 2005, т.175, № 3, с. 225-246
 21. *Яландин М.И., Шпак В.Г.* Мощные малогабаритные импульсно-периодические генераторы субнаносекундного диапазона (Обзор). // ПТЭ. 2001. №.3. с.5-31.