

На правах рукописи



КОЧУРИН ЕВГЕНИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ

**НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ПОВЕРХНОСТИ
РАЗДЕЛА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЖИДКОСТЕЙ В
ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ**

01.04.13 — электрофизика, электрофизические установки

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург
2015

Работа выполнена в Лаборатории нелинейной динамики Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института электрофизики Уральского отделения Российской академии наук.

Научный руководитель: доктор физико-математических наук,
в.н.с. Лаборатории нелинейной динамики
ФГБУН ИЭФ УрО РАН
Зубарев Николай Михайлович

Официальные оппоненты: **Киселев Владимир Валерьевич**
доктор физико-математических наук,
г.н.с. Лаборатории теории нелинейных явлений
ФГБУН ИФМ УрО РАН

Майер Александр Евгеньевич
доктор физико-математических наук,
заведующий Кафедрой общей и прикладной физики
ФГБОУ ВПО "Челябинский государственный
университет"

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Южно-Уральский государственный университет"
(национальный исследовательский университет)
ФГБОУ ВПО "ЮУрГУ"(НИУ)

Защита состоится "9" июня 2015 г. в 14 часов 00 минут на заседании Дисс. совета Д004.024.01 в Институте электрофизики УрО РАН (620016, г. Екатеринбург, ул. Амундсена, д.106).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Института электрофизики УрО РАН, <http://iep7.iep.uran.ru/iep/diss/kochurin2014.html>.

Автореферат разослан " " 2015 г.

Учёный секретарь
Диссертационного совета,
доктор физико-математических наук



Н.Н.Сюткин

Общая характеристика работы

Актуальность темы исследования. Теоретическое описание динамики поверхности жидкости — классическая, однако во многом неразрешенная задача, основная трудность которой заключается в существенной нелинейности уравнений движения. Хорошо известно, что достаточно сильное внешнее электрическое поле, направленное по нормали к свободной поверхности диэлектрической жидкости, либо поверхности раздела двух жидкостей, приводит к развитию апериодической неустойчивости границы. Впервые линейный анализ задачи был проведен Дж. Мелчером и Дж. Тейлором в работах [1, 2]. Экспоненциальный рост амплитуды возмущений границы на начальной (линейной) стадии электрогидродинамической неустойчивости неизбежно приводит к тому, что возрастающую роль начинают играть нелинейные эффекты. Общеизвестно также, что внешнее горизонтальное электрическое поле оказывает стабилизирующее воздействие на свободную поверхность жидкого диэлектрика, а также на поверхность раздела диэлектрических жидкостей [3, 4]. На границе жидкостей в горизонтальном поле могут распространяться нелинейные волны, скорость которых пропорциональна напряженности внешнего электрического поля. С прикладной точки зрения актуальность настоящего диссертационного исследования обуславливается возможностью управления свободными и контактными границами раздела жидкостей внешним электрическим полем.

Одним из наиболее распространенных типов гидродинамических неустойчивостей является неустойчивость Кельвина-Гельмгольца, которая возникает в случае, если две контактирующие среды имеют достаточную разность скоростей. Для множества приложений неустойчивость Кельвина-Гельмгольца является нежелательным эффектом. Стабилизацию границы жидкостей, испытывающей данную неустойчивость, может обеспечить электрическое поле, направленное по касательной к невозмущенной границе раздела. В связи с этим, перспективным также является исследование влияния электрического поля на развитие различного рода гидродинамических неустойчивостей.

Степень разработанности темы исследования. Уравнения, описывающие динамику границы раздела жидкостей во внешнем электрическом поле, в общем случае, являются нелокальными, т.е. они содержат интегро-дифференциальные операторы. При этом в большинстве работ, посвященных аналитическому исследованию нелинейных процессов на поверхности жидких диэлектриков, используется либо приближение мелкой воды, либо требование спектральной узости волнового пакета, позволяющее применять метод огибающих; уравнения тогда сводятся

к уравнениям в частных производных. Теоретическое исследование электрогидродинамики поверхности раздела диэлектрических жидкостей в рамках полных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений до сих пор не проводилось систематически.

Целью работы является аналитическое и численное исследование нелинейной динамики свободных и контактных границ диэлектрических жидкостей в сильном вертикальном или горизонтальном электрическом поле. Для достижения этой цели были поставлены и решены следующие задачи:

1. Аналитическое исследование процесса развития электрогидродинамической неустойчивости поверхности раздела диэлектрических жидкостей с различными физическими свойствами в вертикальном электрическом поле.
2. Развитие подходов, позволяющих значительно упростить нелинейные уравнения движения идеальных диэлектрических жидкостей в электрическом поле.
3. Описание эволюции слабо-нелинейных волн на поверхности раздела жидких диэлектриков в горизонтальном электрическом поле, в том числе и при наличии тангенциального разрыва скоростей на границе жидкостей.
4. Разработка новых, эффективных методов численного описания взаимодействия сильно-нелинейных волн на границе раздела жидкость-газ в горизонтальном электрическом поле.
5. Численное моделирование процесса взаимодействия сильно-нелинейных волн на свободной поверхности непроводящей жидкости с высокой диэлектрической проницаемостью в сильном горизонтальном электрическом поле.

Научная новизна:

- В рамках канонического формализма получены интегро-дифференциальные уравнения, описывающие динамику развития неустойчивости границы раздела диэлектрических жидкостей в вертикальном электрическом поле с учетом квадратичных нелинейностей.
- Показано, что на границе раздела жидкостей в сильном вертикальном электрическом поле за конечное время формируются слабые корневые особенности, для которых кривизна поверхности становится бесконечной.

- Выявлен особый (редуцированный) режим движения поверхности раздела жидкостей в вертикальных электрическом и гравитационном полях, для которого потенциалы электрического поля и скорости жидкостей оказываются линейно зависимыми величинами. В этом режиме жидкости движутся вдоль силовых линий электрического поля.
- Для ситуации, когда неустойчивость Кельвина-Гельмгольца границы раздела жидких диэлектриков стабилизируется внешним горизонтальным электрическим полем, продемонстрирована возможность построения широкого класса точных решений, описывающих взаимодействие слабо-нелинейных поверхностных волн.
- Показано, что слабо-нелинейные волны на границе раздела непроводящих жидкостей, отношение плотностей которых равно отношению их диэлектрических проницаемостей, могут распространяться без искажений вдоль направления внешнего горизонтального поля; для 3D-геометрии получено общее решение, описывающее взаимодействие встречных волн.
- Впервые в рамках метода динамических конформных преобразований проведено численное моделирование процесса взаимодействия сильно-нелинейных волн на свободной границе жидкого диэлектрика в горизонтальном электрическом поле.

Теоретическая и практическая значимость работы. Проведенное систематическое исследование нелинейной динамики поверхности раздела жидкостей, находящихся в электрическом поле, позволило классифицировать основные режимы поведения системы. Результаты работы свидетельствуют о том, что горизонтальное электрическое поле может обеспечить устойчивость поверхности раздела жидкостей по отношению к возмущениям значительной амплитуды.

Впервые осуществлено моделирование сильно-нелинейной динамики свободной поверхности непроводящей жидкости в горизонтальном электрическом поле в рамках динамических конформных преобразований. Реализованные алгоритмы демонстрируют высокую эффективность и точность расчетов.

Полученные в диссертации точные аналитические решения, описывающие начальные стадии развития неустойчивости поверхности раздела жидкостей в вертикальном электрическом поле, могут быть использованы для верификации результатов численных экспериментов.

Методы исследования. Для вывода интегро-дифференциальных уравнений движения поверхности раздела идеальных диэлектрических жидкостей, находящихся в электрическом поле, использованы методы гамильтоновой механики, развитые в работах В. Е. Захарова, Е. А. Кузнецова [5] и J. C. Luke [6]. Численное моделирование динамики поверхностных волн на свободной границе жидкости в горизонтальном электрическом поле проводилось в рамках метода динамических конформных преобразований. В работе также применялся метод упрощения (редукции) исходных нелинейных уравнений электрогидродинамики, основанный на рассмотрении особого режима движения жидкостей, при котором потенциалы скорости жидкостей и электрического поля линейно связаны.

Положения, выносимые на защиту:

1. Аналитические решения уравнений движения диэлектрических жидкостей с поверхностью раздела в сильном вертикальном электрическом поле. Согласно им на границе формируются корневые особенности, для которых кривизна поверхности обращается в бесконечность, а углы наклона остаются малыми.
2. Возможна реализация особого режима движения жидкостей, для которого потенциалы скорости жидкостей и электрического поля функционально связаны. Начальные стадии развития электрогидродинамической неустойчивости поверхности раздела жидкостей в этом режиме описываются известным уравнением лапласовского роста, согласно которому происходит формирование острий и пальцеобразных возмущений на поверхности.
3. В состоянии нейтрального равновесия, когда внешнее горизонтальное электрическое поле полностью стабилизирует неустойчивость Кельвина-Гельмгольца, на границе раздела жидкостей могут распространяться пространственно локализованные волны. При взаимодействии таких волн возможно образование устойчивого волнового пакета.
4. Слабо-нелинейные волны на поверхности раздела диэлектрических жидкостей, отношение плотностей которых близко к отношению их проницаемостей, могут распространяться без искажений вдоль направления приложенного сильного горизонтального электрического поля. Взаимодействие происходит только между встречными волнами, которые восстанавливают свою форму и фазу после столкновения.
5. Взаимодействие встречных сильно-нелинейных волн на свободной поверхности непроводящей жидкости с высокой проницаемостью в горизонтальном

электрическом поле является упругим (энергия и импульс каждой волны сохраняются). В результате взаимодействия меняется геометрия волн; степень деформации определяется четвертой степенью амплитуды, т.е. эффект является слабым. Многократное столкновение волн приводит к формированию на поверхности областей со значительной плотностью энергии электрического поля.

Апробация результатов работы. Основные результаты докладывались на следующих конференциях: Fourth International Conference "Nonlinear Dynamics" - 2013 (Севастополь 2013 г.); XI, XII, XIII, XIV Всероссийские школы-семинары по проблемам физики конденсированного состояния вещества (Екатеринбург 2010 г., 2011 г., 2012 г., 2013 г.); X Международная конференция "Волновая электрогидродинамика проводящей жидкости" (Ярославль 2013 г.); VI International conference "SOLITONS, COLLAPSES AND TURBULENCE: Achievements, Developments and Perspectives" (Новосибирск 2012 г.); X Международная научная конференция "Современные проблемы электрофизики и электрогидродинамики жидкостей" (Санкт-Петербург 2012 г.); Российская конференция по магнитной гидродинамике (Пермь 2012 г.); XVI Научная школа "Нелинейные волны - 2012" (Нижний Новгород 2012 г.); XI Международная конференция "Забабахинские научные чтения" (Снежинск 2012 г.); XIX, XX Научные сессии Совета РАН по нелинейной динамике (Москва 2010 г., 2011г.); 17 Всероссийская научная конференция студентов-физиков и молодых ученых ВНКСФ-17 (Екатеринбург 2011 г.); XVII Зимняя школа по механике сплошных сред (Пермь 2011 г.).

Степень достоверности научных результатов. Обоснованность и достоверность результатов исследования определяются использованием современных аналитических методов описания динамики поверхности жидкостей, позволивших получить ряд точных решений задачи. Достоверность результатов численного моделирования обеспечивается согласием полученных данных с известными частными решениями. В целом, полученные в работе результаты демонстрируют хорошее согласие с результатами других авторов и данными экспериментов.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, пяти глав и заключения. Диссертация изложена на 138 страницах, включая 25 рисунков, 2 таблицы. Список литературы содержит 134 наименования.

Основное содержание работы

Во введении обоснована актуальность темы исследования, сформулирована цель работы, научная новизна и практическая значимость, приведено краткое содержание работы.

В первой главе приведены основные результаты экспериментальных и теоретических исследований нелинейной динамики поверхности жидкостей в электрическом поле. Изложены также основы используемых в работе методов теоретического описания динамики поверхности жидкости, таких как методы гамильтоновой механики, редукции уравнений движения и динамического конформного преобразования.

Опишем кратко современное состояние экспериментальных и теоретических исследований в области электрогидродинамики жидкостей со свободными либо контактными границами. В настоящее время экспериментально изучены процессы развития неустойчивости свободной поверхности проводящих и диэлектрических жидкостей в вертикальном электрическом поле [7–9]. Эксперименты, проведенные с жидкостями сравнимой плотности (см., к примеру, работы [10,11]) показали, что в электрическом поле на границе наблюдается большое разнообразие форм развивающихся возмущений. Как отмечено в работе [10], на границе жидкостей могут развиваться периодические возмущения, системы лунок и уединенные гребни с остроконечными вершинами.

Важным приложением электрогидродинамики жидкостей с поверхностью раздела является получение микро- и наномасштабных частиц и струй путем так называемого электроспиннинга [12,13]. Электроспиннинг — процесс формирования заряженной струи на поверхности раздела жидкостей в вертикальном электрическом поле. Отрыв струи с поверхности жидкости сопровождается формированием конического острия — конуса Тейлора. На Рисунке 1 представлены теневые снимки поверхности раздела органического масла и воды в вертикальном электрическом поле, полученные Дж. Тейлором в работе [12]. Левый снимок на Рисунке 1 соответствует моменту времени до отрыва струи, центральный — моменту ее формирования, а правый — после отрыва струи. В итоге на поверхности раздела жидкостей формируется стационарное коническое возмущение.

Экспериментально исследовано также стабилизирующее воздействие горизонтального электрического поля на границу раздела жидкостей [3,11]. В работе [3] отмечено, что в горизонтальном электрическом поле могут распространяться нелинейные поверхностные волны, скорость которых, пропорциональна напряженности внешнего поля.

В целом, процесс развития возмущений границы раздела жидкостей в одно-

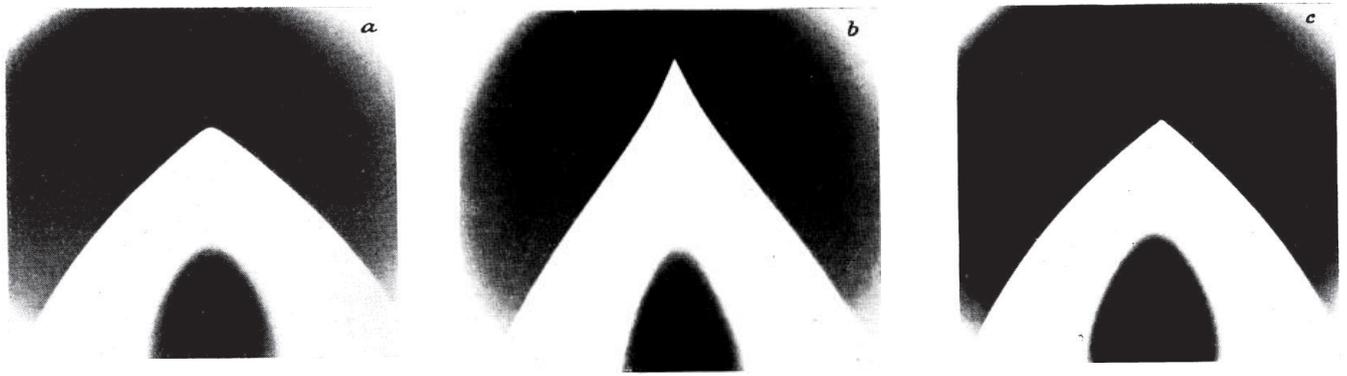


Рисунок 1: Формирование конуса Тейлора на границе раздела органического масла и воды в вертикальном электрическом поле [12]; напряженность поля составляла ~ 10 кВ/см.

родном электрическом поле (вертикальном или горизонтальном) является существенно нелинейным физическим явлением, описание которого требует совместного решения нелинейных уравнений гидродинамики и уравнений Максвелла.

Общим подходом к описанию поведения системы двух жидкостей с поверхностью раздела, либо одной жидкости со свободной поверхностью является редукция исходных уравнений, описывающих течение жидкостей, к уравнениям более низкой размерности на движение непосредственно границы. Возникающие при этом уравнения в общем случае будут нелокальными (т.е. они будут включать в себя интегро-дифференциальные операторы), что затрудняет их исследование. При этом в большинстве работ, посвященных аналитическому описанию нелинейных процессов на поверхности диэлектрических жидкостей, используется либо допущение о том, что длина волны намного превышает глубину слоя жидкости (так называемое приближение мелкой воды), см., к примеру, работы [14–16], либо требование спектральной узости волнового пакета, позволяющее применять метод огибающих [17–19]. Оба подхода, накладывая свои ограничения на форму возмущений, дают возможность свести исходную задачу к рассмотрению сравнительно простых (локальных) уравнений в частных производных. Так, приближение мелкой воды обычно приводит к различным модификациям уравнения Кортевега - де Фриза, а метод огибающих — к модификациям нелинейного уравнения Шредингера. В силу своих ограничений эти уравнения не применимы к описанию таких интересных с физической точки зрения явлений, как формирование различного рода особенностей (в частности, острый и струй).

Во второй главе исследованы нелинейные стадии развития неустойчивости поверхности раздела диэлектрических жидкостей в сильном вертикальном электрическом поле. В рамках канонического (гамильтонова) формализма получены интегро-дифференциальные уравнения, описывающие движение границы с учетом квадратичных нелинейностей. Показано, что эти уравнения допускают точное

аналитическое решение в двух случаях:

$$(1) : \varepsilon_1/\varepsilon_2 = \rho_1/\rho_2 \quad \text{и} \quad (2) : \varepsilon_1/\varepsilon_2 = \rho_2/\rho_1,$$

где $\varepsilon_{1,2}$ — диэлектрические проницаемости нижней и верхней жидкостей, соответственно, а $\rho_{1,2}$ — их плотности. В общем случае, когда нет ограничений на плотности и диэлектрические проницаемости жидкостей, эволюция границы описывается на основе предложенного “локального” приближения.

В первом случае, когда отношение проницаемостей жидкостей равно отношению их плотностей, на границе жидкостей формируются слабые особенности корневого типа, для которых в бесконечность обращается кривизна поверхности, а амплитуда и углы наклона остаются малыми. Действительно, для симметричного относительно точки $x = x_c$ возмущения форма поверхности вблизи особенности определяется выражением

$$z - z_c \sim -|x - x_c|^{3/2},$$

где $z_c = \eta(x_c, t_c)$. Здесь и далее функция $\eta(x, t)$ определяет отклонение границы раздела жидкостей от плоскости $z = 0$. На Рисунке 2 показана поверхность вблизи особенности. Можно предположить, что корневые особенности являются зародышами конусов Тейлора на границе раздела жидкостей, фотоснимки которых приведены на Рисунке 1.

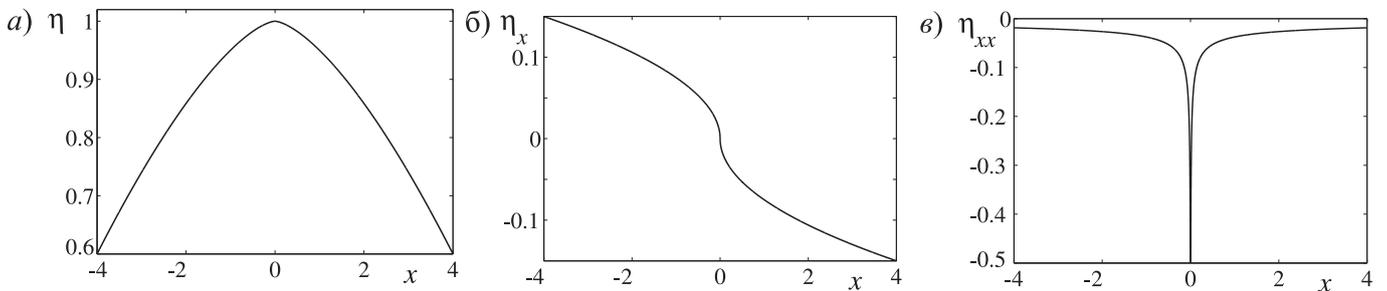


Рисунок 2: Качественно показана граница жидкости (а), крутизна (б) и кривизна (в) поверхности вблизи особенности. Видно, что амплитуда и углы наклона поверхности вблизи особой точки остаются конечными, а в бесконечность обращается ее кривизна.

Во втором случае, когда отношение проницаемостей равно обратному отношению плотностей, была продемонстрирована тенденция к формированию сильных особенностей, для которых бесконечной становится крутизна поверхности; происходит взрывной рост амплитуды возмущений. Показано, что данный режим обладает примечательным свойством — для него может реализоваться ситуация, когда потенциалы скорости и электрического поля являются линейно зависимыми функциями. В следующей Главе 3 этот случай исследуется более подробно.

Результаты, полученные в рамках развиваемого “локального” приближения, т.е. для общего случая, выявили следующую фундаментальную закономерность

в поведении жидкостей с поверхностью раздела в вертикальном электрическом поле. На их границе формируются слабые корневые особенности аналогичные, представленным на Рисунке 2, при чем для границы раздела жидкостей, отношение проницаемостей которых больше обратного отношения плотностей, кривизна поверхности обращается в минус бесконечность, а в противоположном случае — в плюс бесконечность.

В третьей главе исследована динамика границы раздела жидких диэлектриков под действием дестабилизирующих вертикальных электрического и гравитационного полей. Показано, что для границы раздела жидкостей, отношение проницаемостей которых равно обратному отношению плотностей реализуется особый (редуцированный) режим движения, при котором потенциалы скорости жидкостей пропорциональны потенциалам электрического поля.

С физической точки зрения это означает, что существует система координат (в общем случае — неинерциальная), в которой жидкости движутся вдоль силовых линий электрического поля. Условием реализации подобного режима является пропорциональность скорости изменения напряженности внешнего электрического поля и эффективной напряженности гравитационного поля. При этом важно, что предлагаемый подход не ограничен условием малости углов наклона поверхности, а также не накладывает никаких ограничений на симметрию задачи — редукция осуществляется в рамках исходных (нелинейных) трехмерных уравнений движения.

В рамках малоуглового приближения выведено эволюционное уравнение, описывающее динамику поверхности раздела с учетом квадратичных нелинейностей. Показано, что для плоской геометрии задачи оно может быть сведено к известному уравнению лапласовского роста, интегрируемость которого позволяет эффективно описать начальные (слабо-нелинейные) стадии развития электрогидродинамической неустойчивости границы. В соответствии с ним, развитие возмущений поверхности с отрицательной амплитудой приводит к формированию особенностей — точек заострения — для которых в момент формирования особенности $t = t_c$ будет:

$$z - z_c \sim -|x - x_c|^{2/3}.$$

Для противоположного случая, когда амплитуда положительна процесс лапласовского роста приводит к прорастанию пальцеобразных возмущений — см. Рисунок 3, на котором также изображена эволюция периодического возмущения границы.

Следует отметить, что для классической задачи о неустойчивости поверхности раздела двух жидкостей в поле тяжести (неустойчивости Релея-Тейлора) не

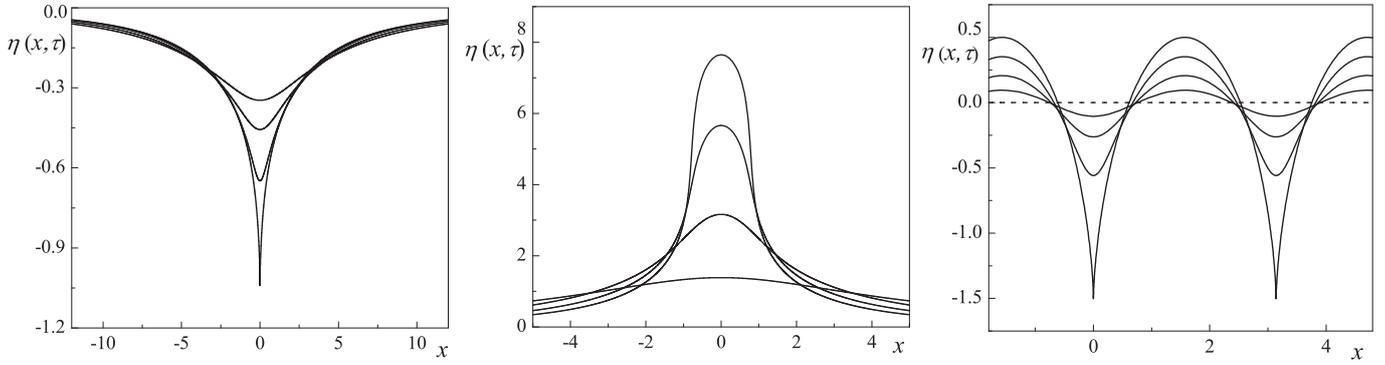


Рисунок 3: Формирование острия, струи (пальцеобразной структуры) и периодической системы острий на поверхности раздела жидкостей в вертикальных электрическом и гравитационном полях.

известно аналогичных редуций. Возможность редуции уравнений движения и, в отдельных случаях, построения точных решений задачи при наличии электрического поля связана с тем обстоятельством, что потенциалы поля и скорости описываются сходными уравнениями, и введение в уравнения движения электростатического давления приводит их к более симметричному виду.

В четвертой главе исследовано стабилизирующее влияние горизонтального электрического поля на динамику границы раздела жидкостей при наличии тангенциального разрыва скоростей на поверхности. Известно, что достаточно большая разность скоростей обуславливает развитие неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. В рамках гамильтонова формализма выведена система интегродифференциальных уравнений, описывающая динамику слабо-нелинейных волн на границе. В следствие сложности полной системы не удастся построить ее общее решение аналитически. Тем не менее, в настоящей главе выявлены два частных случая, для которых система уравнений допускает точные аналитические решения.

Первый случай реализуется в состоянии нейтрального равновесия, когда внешнее электрическое поле на границе полностью стабилизирует неустойчивость Кельвина-Гельмгольца. Для жидкостей, отношение проницаемостей которых равно обратному отношению плотностей, возможна реализация редуцированного режима движения аналогичного, рассматриваемому в Главе 3. Полная система уравнений в этом режиме существенно упрощается. Для плоской симметрии задачи динамика поверхности раздела жидкостей описывается единственным уравнением

$$\eta_t = \frac{1}{2}(V_1 - V_2)(1 - A^2) \left(\hat{H}(\eta\eta_x)_x - (\eta\hat{H}\eta_x)_x \right), \quad (1)$$

где $(V_1 - V_2)$ — скачок скоростей на границе, $A = (\rho_1 - \rho_2)/(\rho_1 + \rho_2)$ — число

Атвуда, \hat{H} — оператор Гильберта, определяемый как

$$\hat{H}\phi(x) = \frac{1}{\pi} \text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(x')}{x - x'} dx'.$$

Уравнение (1) можно переписать в более удобном виде при использовании следующего свойства оператора Гильберта: $\hat{H}\phi^\pm = \pm i\phi^\pm$, где ϕ^+ и ϕ^- — аналитические функции в верхней и нижней полуплоскости комплексной переменной x , соответственно. В итоге уравнение (1) примет компактный вид

$$\eta_\tau^+ = 2i\hat{P}^+(\eta^+\eta_x^-)_x, \quad (2)$$

где $\tau = t \cdot (V_1 - V_2)(1 - A^2)/2$ — вспомогательная переменная времени, $\hat{P}^+ = (1 - i\hat{H})/2$ — проекционный оператор, действие которого на произвольную комплексную функцию определяется как $\hat{P}^+\phi = \phi^+$.

В Главе 4 удалось показать, что уравнение (2) имеет класс точных решений, представляющих собой суперпозицию N локализованных возмущений вида:

$$\eta^+(x, \tau) = \sum_{n=1}^N \frac{iS_n/2}{x + p_n(\tau)}, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

где S_n — вещественные постоянные, $p_n(\tau)$ — координаты особых точек (полюсов) на комплексной плоскости x , удовлетворяющие системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dp_n}{d\tau} = \sum_{j=1}^N \frac{S_j}{(p_n - \bar{p}_j)^2}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (3)$$

Для $N = 1$ система (3) описывает распространение нелинейной уединенной волны в направлении внешнего электрического поля при отрицательном S_1 и против направления поля при положительном S_1 в системе центра масс жидкостей. При этом движение происходит без искажения формы и с постоянной скоростью.

Анализ системы (3) для $N = 2$ показал, что пара волн, для которых S_1 и S_2 имеют одинаковый знак может образовать структурно устойчивый пакет волн — бризер. Так, на Рисунке 4 показана динамика взаимодействия локализованных волн, для которых $S_1 = S_2 = 0.05$. Видно, что волны движутся согласованно, периодически обгоняя друг друга. Встречные волны, для которых параметры $S_{1,2}$ имеют различные знаки, не образуют волнового пакета. После столкновения они продолжают движение в противоположные стороны.

Второй случай, при котором динамику нелинейных волн возможно описать аналитически, реализуется в ситуации, когда влиянием разрыва скоростей на границе можно пренебречь, т.е. действие внешнего электрического поля является доминирующим. Показано, что на границе раздела жидкостей, отношение диэлектрических проницаемостей которых равно отношению их плотностей, нелинейные волны могут распространяться без

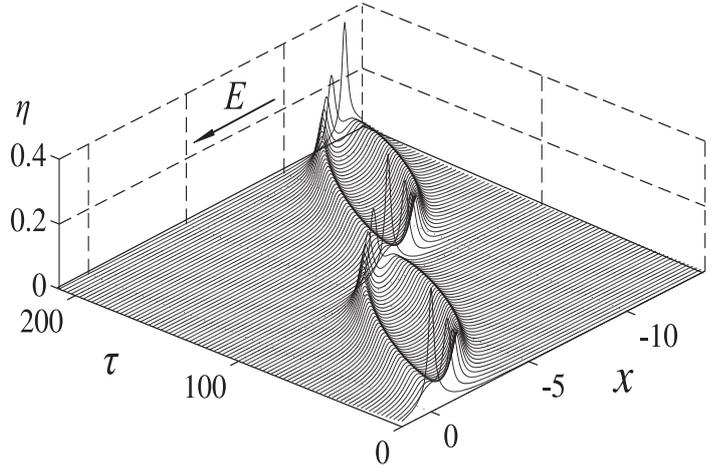


Рисунок 4: Движение пары взаимодействующих волн для начальных условий: $\tau = 0$, $x_1 = x_2 = 0$, $y_1 = 0.845$, $y_2 = 0.155$.

искажений вдоль направления внешнего горизонтального электрического поля. Нелинейность оказывает влияние только на взаимодействие встречных волн.

В Главе 4 удалось построить общее решение уравнений движения, описывающее взаимодействие встречных нелинейных локализованных волн в 3D-геометрии. Оно имеет вид:

$$\eta(x, y, t) = f(x - ct, y) + g(x + ct, y) - \frac{c}{2} \hat{k} \left(fg + \nabla_{\perp} \hat{k}^{-1} f \cdot \nabla_{\perp} \hat{k}^{-1} g \right) - \frac{c}{2} \nabla_{\perp} \left(f \nabla_{\perp} \hat{k}^{-1} g + g \nabla_{\perp} \hat{k}^{-1} f \right), \quad (4)$$

где функции f и g соответствуют волнам, распространяющимся вдоль направления и против направления электрического поля, соответственно; $c = EA$ — скорость пропорциональная напряженности внешнего поля E (к примеру, для границы раздела воды и воздуха характерное значение напряженности поля составляет 2-5 кВ/см). Здесь ∇_{\perp} — двумерный градиент в плоскости (x, y) , а \hat{k} — интегральный оператор, задаваемый выражением

$$\hat{k} f = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x', y')}{[(x' - x)^2 + (y' - y)^2]^{3/2}} dx' dy'.$$

В соответствии с решением (4), встречные слабо-нелинейные волны в результате взаимодействия сохраняют свою форму и фазу. На Рисунке 5 представлена эволюция трехмерных пространственно локализованных волн вида

$$f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2) \quad \text{и} \quad g(x, y) = -\exp(-x^2 - y^2).$$

Как видно из Рисунка 5(a), роль нелинейности нарастает при сближении уединенных волн, а в момент их встречи ($t = 0$) именно нелинейность определяет гео-

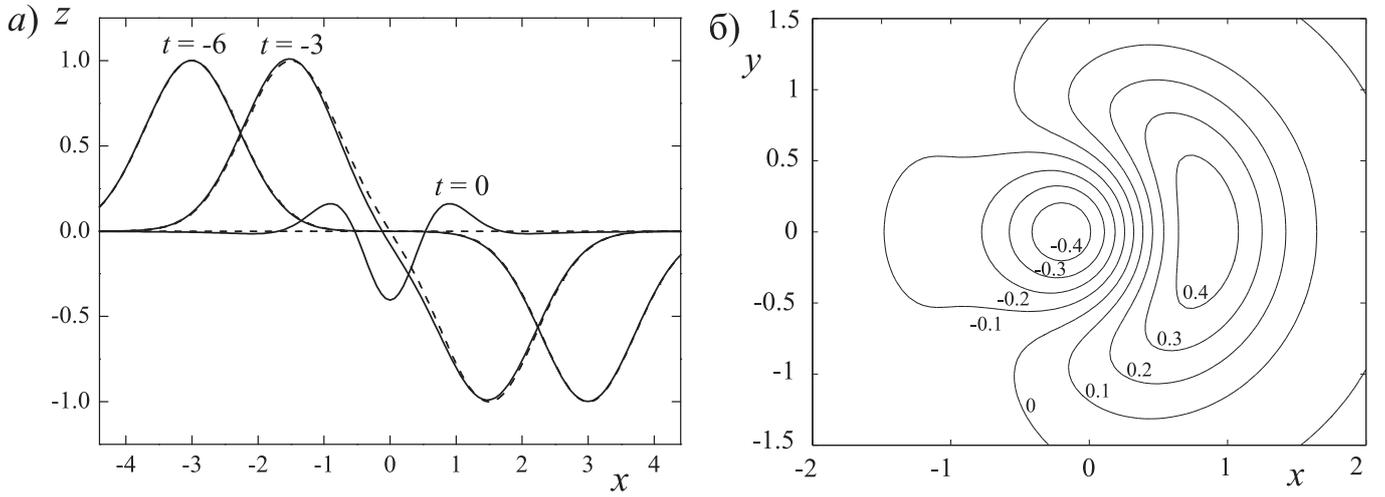


Рисунок 5: Показана эволюция встречных волн при $A = A_E = 0.5$, $E = 1$. Слева (а) приведено сечение поверхности раздела плоскостью $y = 0$, штриховая линия — линейный анализ, сплошная линия — аналитическое решение (4). Справа (б) приведены линии уровня (изолинии), соответствующие постоянным значениям функции η в момент времени $t = 0.4$.

метрию границы (в линейном приближении в этот момент граница является плоской). С влиянием нелинейности связано отсутствие симметрии на Рисунке 5(б) относительно прямой $x = 0$.

Отметим, что в пределе $\varepsilon_2/\varepsilon_1 = \rho_2/\rho_1 \rightarrow 0$, который соответствует границе раздела диэлектрической жидкости высокой проницаемостью с газовой средой малой плотности, решения для бегущих в одну сторону волн становятся справедливыми и для сильно-нелинейных волн на поверхности. Открытым остается вопрос о том, каким образом будет происходить взаимодействие встречных волн значительной амплитуды.

В пятой главе рассмотрена сильно-нелинейная динамика свободной поверхности идеальной диэлектрической жидкости со значительной проницаемостью в сильном горизонтальном электрическом поле. Продемонстрировано, что взаимодействие встречных уединенных волн произвольной геометрии является упругим — они сохраняют свою энергию и импульс. С использованием конформных переменных осуществлено численное моделирование процесса взаимодействия волн.

Осуществляется конформное преобразование области, занимаемой жидкостью в параметрическую полуплоскость: $-\infty < u < +\infty$ и $v < 0$. Условие $v = 0$ соответствует свободной поверхности жидкости. В исследуемой задаче вспомогательные переменные u и v имеют конкретный физический смысл: u с точностью до знака совпадает с потенциалом поля φ , а условие $v = \text{const}$ определяет силовые линии электрического поля. В итоге система уравнений движения поверхности жидкости в конформных переменных примет вид:

$$R_t = i(UR_u - U_uR), \quad V_t = i(UV_u - D_uR), \quad (5)$$

где R и V — аналитические в нижней полуплоскости комплексные функции, определяющие электрическое поле и скорость жидкости на границе. Вспомогательные функции U и D определены следующим образом:

$$U = \hat{P}^-(V\bar{R} + \bar{V}R), \quad D = \hat{P}^-(V\bar{V} - R\bar{R}),$$

где горизонтальная черта над функциями R и V соответствует комплексному сопряжению. Здесь \hat{P}^- — проекционный оператор, сопряженный введенному ранее оператору \hat{P}^+ . Интегро-дифференциальные уравнения (5) являются кубически нелинейными. Эта система оказывается удобной для численного моделирования сильно-нелинейной динамики свободной поверхности жидкости. Отметим, что использование переменных R и V было впервые предложено в работах [20, 21] применительно к описанию поверхности идеальной жидкости в поле тяжести.

Важнейшим свойством системы (5) является то, что она допускает пару точных частных решений

$$R = 1 \pm iV = R^\pm(u \mp t),$$

где функции R^\pm соответствуют волнам, распространяющимся без изменения формы в направлении (верхние знаки), либо против направления (нижние знаки) внешнего поля. Возникает вопрос, каким образом будет происходить взаимодействие встречных сильно-нелинейных волн? Для ответа на него необходимо было осуществить численное моделирование динамики поверхности в рамках полной системы (5). При этом использовались спектральные методы, что обусловлено следующим свойством оператора Гильберта:

$$\hat{H}e^{iku} = i \operatorname{sign}(k)e^{iku}.$$

Численное решение системы (5) показало, что в результате взаимодействия волны деформируются. На Рисунке 6(a) показана динамика взаимодействия локализованных волн изначально гауссовой формы. Видно, что волны без искажений распространяются до и после момента встречи в точке $x = 0$. При столкновении происходит интенсивное взаимодействие, в результате которого форма каждой волны меняется — они несколько наклоняются в стороны противоположные их движению. Для волн относительно малой амплитуды этот эффект является слабым: для встречных волн одинаковой формы деформация определяется четвертой степенью их амплитуды.

При многократном столкновении сильно-нелинейных волн наблюдается тенденция к формированию особенностей — точек со значительной плотностью энергии поля. Результаты численного моделирования столкновения волн одинаковой отрицательной амплитуды представлены на Рисунке 6(б). Видно, что вследствие

столкновений подошва каждой волны заостряется. В точках наибольшего заострения многократно увеличивается напряженность электрического поля. Наблюдаемая тенденция к локализации энергии поля может приводить к пробоем жидкого диэлектрика.

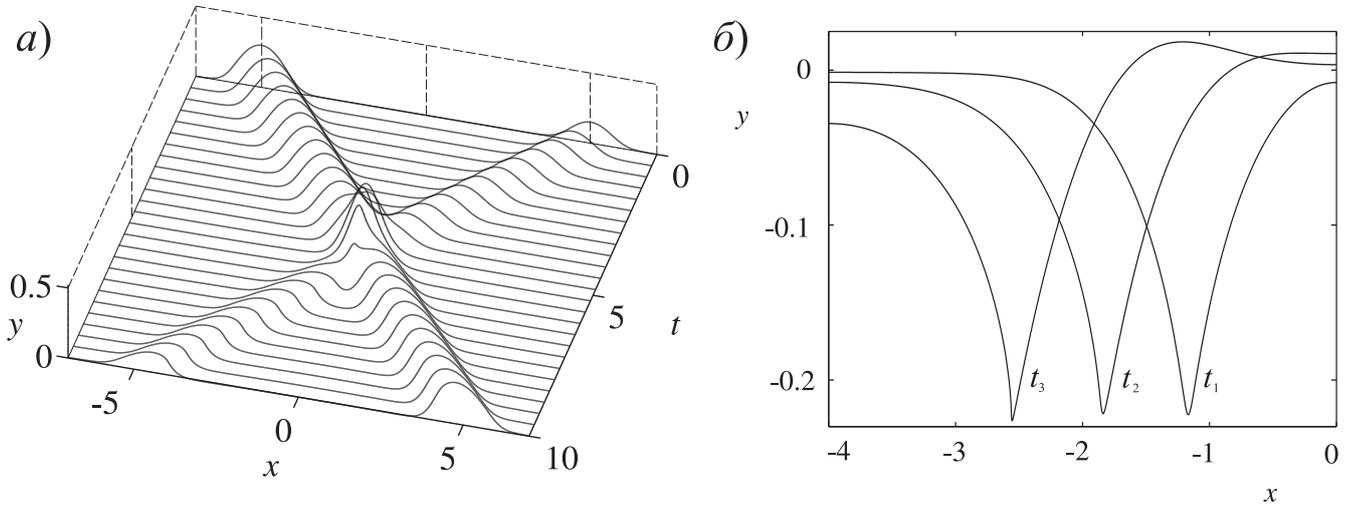


Рисунок 6: Слева (а) показана эволюция поверхности жидкости при столкновении уединенных волн с амплитудами $a^+ = 0.3$ и $a^- = 0.15$; справа (б) — профиль движущейся налево уединенной волны после одного, трех и пяти столкновений со встречной волной той же формы (моменты времени $t_1 = 1.2$, $t_2 = 10.1$ и $t_3 = 19.05$)

Основные результаты и выводы

В диссертации проведено систематическое исследование нелинейной динамики поверхности раздела диэлектрических жидкостей в сильном электрическом поле. Представим основные результаты, полученные в работе:

1. Получены аналитические решения, описывающие формирование слабых корневых особенностей на границе раздела диэлектрических жидкостей в сильном вертикальном электрическом поле. Согласно им кривизна обращается в минус бесконечность для $\epsilon_1/\epsilon_2 > \rho_2/\rho_1$ и в плюс бесконечность для $\epsilon_1/\epsilon_2 < \rho_2/\rho_1$; амплитуда и углы наклона поверхности при этом остаются конечными.
2. Выявлен особый режим течения жидкостей, для которого потенциалы электрического поля и скорости оказываются линейно зависимыми величинами. Это означает существование такой (в общем случае — неинерциальной) системы координат, в которой жидкости движутся по силовым линиям электрического поля. Реализация данного режима возможна для жидкостей, отношение плотностей которых близко к обратному отношению их проницаемостей, в вертикальных электрическом и гравитационном полях, а также в

горизонтальном электрическом поле при наличии тангенциального разрыва скоростей на границе.

3. Продемонстрировано, что слабо-нелинейные стадии развития электрогидродинамической неустойчивости поверхности раздела жидкостей в особом режиме (см. пункт 2) представляют собой процесс так называемого лапласовского роста, для которого характерно формирование острий и пальцеобразных возмущений поверхности.
4. Получен широкий класс точных решений, описывающих слабо-нелинейную динамику периодических либо локализованных волн на поверхности раздела жидкостей в условии нейтрального равновесия, т.е. когда внешнее горизонтальное электрическое поле подавляет неустойчивость Кельвина-Гельмгольца. Показано, что уединенные нелинейные волны могут распространяться без искажений вдоль направления электрического поля с постоянной скоростью. Описано взаимодействие таких солитоноподобных возмущений; как оказалось, они могут образовать структурно устойчивый волновой пакет (бризер).
5. Для случая сильного горизонтального электрического поля показано, что волны малой, но конечной амплитуды могут распространяться без искажений вдоль направления внешнего поля по поверхности раздела жидкостей. Подобная ситуация реализуется для жидкостей, отношение плотностей которых близко к отношению их диэлектрических проницаемостей. Описано взаимодействие распространяющихся в противоположных направлениях нелинейных волн; как оказалось встречные уединенные волны сохраняют свою форму и фазу в результате взаимодействия.
6. Взаимодействие встречных сильно-нелинейных волн на свободной поверхности диэлектрической жидкости с высокой проницаемостью в горизонтальном поле является упругим (энергия и импульс каждой волны сохраняются). Профиль волн в результате взаимодействия незначительно меняется: степень деформации определяется четвертой степенью амплитуды. Многократное столкновение волн приводит к формированию областей со значительной плотностью энергии электрического поля на поверхности.

Список публикаций автора по теме диссертации

Публикации в реферируемых научных журналах

- A1. Зубарев, Н. М. Взаимодействие сильно нелинейных волн на свободной поверхности непроводящей жидкости в горизонтальном электрическом поле / Н.М. Зубарев, Е. А. Кочурин // Письма в ЖЭТФ. - 2014. - Т. 99. - В. 11. - С. 729-734.
- A2. Kochurin, E. A. Formation of curvature singularities on the interface between dielectric liquids in a strong vertical electric field / E. A. Kochurin, N. M. Zubarev, O. V. Zubareva // Phys. Rev. E. - 2013. - V. 88. - I. 2. - P. 023014.
- A3. Зубарев, Н. М. Трехмерные нелинейные волны на границе раздела диэлектрических жидкостей во внешнем горизонтальном электрическом поле / Н. М. Зубарев, Е. А. Кочурин // ПМТФ. - 2013. - Т. 54. - В. 2. - С. 52-58.
- A4. Kochurin, E. A. Reduced equations of motion of the interface of dielectric liquids in vertical electric and gravitational fields / E. A. Kochurin, N. M. Zubarev // Phys. Fluids. - 2012. - V. 24. - P. 072101.
- A5. Зубарев, Н. М. Нелинейная динамика поверхности раздела диэлектрических жидкостей в вертикальных электрическом и гравитационном полях / Н. М. Зубарев, Е. А. Кочурин // Письма в ЖТФ. - 2011. - Т. 37. - В. 20 - С. 70-74.

Публикации в сборниках тезисов и трудов конференций

- B1. Зубарев, Н. М. Эволюция поверхности раздела диэлектрических жидкостей в вертикальном электрическом поле / Н. М. Зубарев, Е. А. Кочурин // Материалы X Международной конференции - Волновая электрогидродинамика проводящей жидкости. - 2013 - С. 85-89.
- B2. Kochurin, E. A. Formation of singularities on the interface of dielectric liquids in a strong vertical electric field / E. A. Kochurin, N. M. Zubarev // Proceedings of VI International conference - SOLITONS, COLLAPSES AND TURBULENCE: Achievements, Developments and Perspectives. - 2012. - P. 143-144.
- B3. Зубарев, Н. М. Формирование особенностей на поверхности раздела диэлектрических жидкостей в вертикальном электрическом поле / Н. М. Зубарев, Е. А. Кочурин // Сборник докладов X Международной научной конференции — Современные проблемы электрофизики и электрогидродинамики жидкостей. - 2012. - С. 214-216.

- В4. Зубарев, Н. М. Нелинейная динамика поверхности раздела диэлектрических жидкостей в сильном вертикальном электрическом и гравитационном полях / Н. М. Зубарев, Е. А. Кочурин // Материалы ВНКСФ -XVII. - 2011. - С. 262.
- В5. Кочурин, Е. А. Неустойчивость поверхности поверхности раздела диэлектрических жидкостей в вертикальном электрическом поле; редукция уравнений движения / Е. А. Кочурин, Г. Ш. Болтачев, Н. М. Зубарев, Н. М. Руев // Труды XVII Зимней школы по механике сплошных сред. - 2011. - С. 182.
- В6. Зубарев, Н. М. Нелинейная динамика поверхности раздела диэлектрических жидкостей в вертикальном электрическом поле / Н. М. Зубарев, Е. А. Кочурин // Тезисы докладов СПФКС-11. - 2010. - С. 206.
- В7. Зубарев, Н. М. Стабилизация неустойчивости Кельвина-Гельмгольца внешним тангенциальным электрическим полем / Н. М. Зубарев, Е. А. Кочурин //Тезисы докладов СПФКС-12. - 2011. - С. 157.
- В8. Kochurin, E. A. Nonlinear stages of Kelvin-Helmholtz instability suppressed by tangential electric field / E. A. Kochurin, N. M. Zubarev// Proceedings of the 4th International Conference on Nonlinear Dynamics (ND-KhPI2013). - 2013. - P. 259-264.
- В9. Зубарев, Н. М. Хаотическая динамика локализованных возмущений на границе раздела диэлектрических жидкостей в горизонтальном электрическом поле / Н. М. Зубарев, Е. А. Кочурин //Тезисы докладов СПФКС-12. - 2011. - С. 156.
- В10. Зубарев, Н. М. Нелинейная динамика поверхности раздела диэлектрических жидкостей в сильном горизонтальном электрическом поле / Н. М. Зубарев, Е. А. Кочурин// Тезисы докладов XVI научной школы "Нелинейные волны -2012". - 2012. - С. 76-77.
- В11. Зубарев, Н.М. Нелинейные волны на поверхности раздела жидких диэлектриков в сильном горизонтальном электрическом поле / Н. М. Зубарев, Е. А. Кочурин //Тезисы докладов СПФКС-13. - 2012. - С. 225.
- В12. Зубарев, Н. М. Нелинейная динамика поверхности раздела магнитных жидкостей в горизонтальном магнитном поле при наличии горизонтального разрыва скоростей / Н. М. Зубарев, Е. А. Кочурин // Сборник тезисов докладов Российской конференции по магнитной гидродинамике. - 2012. - С. 45.
- В13. Зубарев, Н. М. Моделирование сильно-нелинейной динамики свободной поверхности жидкого диэлектрика, находящегося в сильном горизонтальном

электрическом поле / Н. М. Зубарев, Е. А. Кочурин, Е. А. Чингина // Тезисы докладов СПФКС-14. - 2013. - С. 196.

Список цитированной литературы

- [1] Melcher, J. R. Electrohydrodynamic and magnetohydrodynamic surface waves and instabilities / J. R. Melcher // Phys. Fluids. - 1961. - V. 4 - P. 1348.
- [2] Taylor, G. I. The stability of a horizontal fluid interface in a vertical electric field / G. I. Taylor, A. D. McEwan // J. Fluid Mech. - 1965. - V. 22. - P. 1-15.
- [3] Melcher, J. R. Interfacial relaxation overstability in a tangential electric field / J. R. Melcher, Jr. W. J. Schwarz // Physics of Fluids. - 1968. - V. 11. - P. 2604-2616.
- [4] Melcher, J. R. Field-coupled surface waves / J. R. Melcher. - Cambridge: MIT Press, 1963.
- [5] Захаров, В. Е. Гамильтоновский формализм для нелинейных волн / В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов // УФН. - 1997. - Т. 11.- С. 137-167.
- [6] Luke, J. C. A variational principle for a fluid with a free surface / J. C. Luke // J. Fluid Mech. - 1967. - V. 27(2). - P. 395-397.
- [7] Габович, М. Д. Исследование нелинейных волн на поверхности жидкого металла, находящегося в электрическом поле / М. Д. Габович, В. Я. Порицкий // Письма в ЖЭТФ. - 1981. - Т. 33. - В. 6. - С. 320-324.
- [8] Шикин, В. Б. Неустойчивость и перестройки заряженной поверхности жидкости / В. Б. Шикин // УФН. - 2011. - Т. 181 - В. 12. - С. 1241-1264.
- [9] Хайкин, М. С. Нарушение устойчивости заряженной поверхности жидкого гелия и образование баблонов / М. С. Хайкин, А. П. Володин // УФН. - 1978. - Т. 126 - В. 4. - С. 691-693.
- [10] Жакин, А. И. О нелинейных равновесных формах и нелинейных волнах на поверхности феррожидкости (идеального проводника) в поперечном магнитном (электрическом) поле / А. И. Жакин // Магнитная гидродинамика. - 1983. - Т. 4. - С. 41-48.
- [11] Zahn, M. Contributions of Prof. James R. Melcher to engineering education / M. Zahn, H. A. Haus // Journal of Electrostatics. - 1995. - V. 34. - P. 109-162.
- [12] Taylor, G. Disintegration of water drops in an electric field / G. Taylor // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, mathematical and physical sciences. - 1964. - V. 280. - N. 1382. - P. 383-397.

- [13] Maheshwari, S. Anomalous conical menisci under an ac field-departure from the dc Taylor cone / S. Maheshwari, H.-Ch. Chang. // Applied Physics Letters. - 2006. - V. 89. - P. 234103.
- [14] Thaokar, R. M. Electrohydrodynamic instability of the interface between two fluids confined in a channel / R. M. Thaokar, V. Kumaran // Phys. Fluids. - 2005. - V. 17. - P. 084104.
- [15] Papageorgiou D. T., Gravity capillary waves in fluid layers under normal electric fields / D. T. Papageorgiou, P. G. Petropoulos, J.-M. Vanden-Broeck // Phys. Rev. E. - 2005. - V. 72. - P. 051601.
- [16] Жакин, А. И. Электродинамика заряженных поверхностей / А. И. Жакин // УФН. - 2013. - Т. 183. - В. 2. - С. 153-177.
- [17] Elhefnawy, A. R. F. Nonlinear electrohydrodynamic instability of two liquid layers / A. R. F. Elhefnawy // Int. J. Eng. Sci. - 2002. - V. 40. - P. 319.
- [18] El-Sayed, M. F. Nonlinear analysis and solitary waves for two superposed streaming electrified fluids of uniform depths with rigid boundaries / M. F. El-Sayed // Arch. Appl. Mech. - 2008. - V. 78. - P. 663.
- [19] Шикин, В. Б. Неустойчивость и перестройки заряженной поверхности жидкости / В. Б. Шикин // УФН. - 2011. - Т. 181. - С. 1241-1264.
- [20] Дьяченко, А. И. О динамике идеальной жидкости со свободной поверхностью / А.И. Дьяченко // ДАН. - 2001. - Т. 376. - С. 27-29.
- [21] Zakharov, V. E. New method for numerical simulation of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface / V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko, O. A. Vasilyev // Eur. J. Mech. B Fluids. - 2002. - V. 21. - P. 283-291.

Работа выполнена при финансовой поддержке фонда «Династия» и Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 14-08-31194).

Подписано в печать 19.09.2014. Формат 60X90. Тираж 80. Заказ №1166.
Отпечатано и сброшюровано в ООО "Палитра",
620075, г.Екатеринбург, ул.Мамина-Сибиряка, 137.