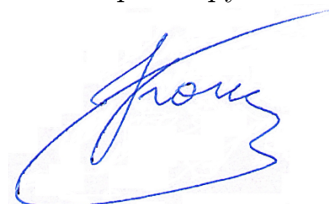


ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ  
ИНСТИТУТ ЭЛЕКТРОФИЗИКИ УРАЛЬСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ  
РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи



КОЧУРИН ЕВГЕНИЙ АЛЕКСАНДРОВИЧ

**НЕЛИНЕЙНАЯ ДИНАМИКА ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА  
ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЖИДКОСТЕЙ В ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ  
ПОЛЕ**

01.04.13 – электрофизика, электрофизические установки

Д и с с е р т а ц и я

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:

д. ф.-м. н.

Н.М. Зубарев

Екатеринбург

2014

# Оглавление

<b>Введение</b>	<b>4</b>
<b>Глава 1. Нелинейная динамика поверхности жидкости в электрическом поле:</b>	
<b>обзор литературы</b>	<b>12</b>
1.1 Результаты экспериментальных исследований . . . . .	12
1.2 Результаты теоретических исследований . . . . .	16
1.3 Методы теоретического описания нелинейной динамики поверхности жидкости	19
1.4 Выводы к Главе 1 . . . . .	27
<b>Глава 2. Электрогидродинамическая неустойчивость поверхности раздела жид-</b>	
<b>костей</b>	<b>29</b>
2.1 Введение . . . . .	29
2.2 Исходные уравнения . . . . .	30
2.3 Слабо-нелинейный анализ . . . . .	34
2.4 Предварительный анализ . . . . .	37
2.5 Динамика поверхности раздела для $A_E = A$ . . . . .	42
2.6 Динамика поверхности раздела для $A_E = -A$ . . . . .	44
2.7 Формирование особенностей в общем случае . . . . .	49
2.8 Выводы к Главе 2 . . . . .	53
<b>Глава 3. Нелинейная динамика поверхности раздела жидкостей в вертикаль-</b>	
<b>ном электрическом и гравитационном полях</b>	<b>55</b>
3.1 Введение . . . . .	55
3.2 Уравнения движения . . . . .	57
3.3 Редукция уравнений движения . . . . .	59

3.4	Устойчивость редукции . . . . .	66
3.5	Уравнение лапласовского роста . . . . .	70
3.6	Анализ поведения поверхности . . . . .	73
3.7	Выводы к Главе 3 . . . . .	78
<b>Глава 4. Нелинейные волны на поверхности раздела жидкостей в горизон-</b>		
<b>тальном электрическом поле</b>		<b>80</b>
4.1	Введение . . . . .	80
4.2	Исходные уравнения . . . . .	82
4.3	Слабо-нелинейные волны на поверхности . . . . .	85
4.4	Нелинейные волны в режиме нейтральной устойчивости . . . . .	87
4.5	Редукция уравнений движения . . . . .	94
4.6	Нелинейные волны в отсутствие разрыва скоростей на границе . . . . .	97
4.7	Выводы к Главе 4 . . . . .	100
<b>Глава 5. Взаимодействие сильно-нелинейных волн на свободной границе непро-</b>		
<b>водящей жидкости в горизонтальном электрическом поле</b>		<b>102</b>
5.1	Введение . . . . .	102
5.2	Исходные уравнения движения . . . . .	103
5.3	Уравнения в конформных переменных . . . . .	105
5.4	Упругое взаимодействие волн . . . . .	107
5.5	Численный алгоритм . . . . .	109
5.6	Результаты численного моделирования . . . . .	111
5.6.1	Сравнение с точным решением . . . . .	111
5.6.2	Взаимодействие встречных локализованных волн . . . . .	112
5.6.3	Взаимодействие периодических волн . . . . .	118
5.7	Выводы к Главе 5 . . . . .	123
<b>Заключение</b>		<b>123</b>
<b>Список литературы</b>		<b>126</b>

# Введение

**Актуальность темы исследования.** Теоретическое описание динамики поверхности жидкости — классическая, однако во многом неразрешенная задача, основная трудность которой заключается в существенной нелинейности уравнений движения. Хорошо известно, что достаточно сильное внешнее электрическое поле, направленное по нормали к свободной поверхности диэлектрической жидкости, либо поверхности раздела двух жидкостей, приводит к развитию апериодической неустойчивости границы. Впервые линейный анализ задачи был проведен Дж. Мелчером и Дж. Тейлором в работах [1, 2]. Экспоненциальный рост амплитуды возмущений границы на начальной (линейной) стадии электрогидродинамической неустойчивости неизбежно приводит к тому, что возрастающую роль начинают играть нелинейные эффекты. Общеизвестно также, что внешнее горизонтальное электрическое поле оказывает стабилизирующее воздействие на свободную поверхность жидкого диэлектрика, а также на поверхность раздела диэлектрических жидкостей [3, 4]. На границе жидкостей в горизонтальном поле могут распространяться нелинейные волны, скорость которых пропорциональна напряженности внешнего электрического поля. С прикладной точки зрения актуальность настоящего диссертационного исследования обуславливается возможностью управления свободными и контактными границами раздела жидкостей внешним электрическим полем.

Одним из наиболее распространенных типов гидродинамических неустойчивостей является неустойчивость Кельвина-Гельмгольца, которая возникает в случае, если две контактирующие среды имеют достаточную разность скоростей. Для множества приложений неустойчивость Кельвина-Гельмгольца является нежелательным эффектом. Стабилизацию границы жидкостей, испытывающей данную неустойчивость, может обеспечить электрическое поле, направленное по касательной к невозмущенной границе раздела. В связи с этим, перспективным также является исследование влияния электрического поля на развитие раз-

личного рода гидродинамических неустойчивостей.

**Степень разработанности темы исследования.** Уравнения, описывающие динамику границы раздела жидкостей во внешнем электрическом поле, в общем случае, являются нелокальными, т.е. они содержат интегро-дифференциальные операторы. При этом в большинстве работ, посвященных аналитическому исследованию нелинейных процессов на поверхности жидких диэлектриков, используется либо приближение мелкой воды, либо требование спектральной узости волнового пакета, позволяющее применять метод огибающих; уравнения тогда сводятся к уравнениям в частных производных. Теоретическое исследование электрогидродинамики поверхности раздела диэлектрических жидкостей в рамках полных нелинейных интегро-дифференциальных уравнений до сих пор не проводилось систематически.

**Целью работы** является аналитическое и численное исследование нелинейной динамики свободных и контактных границ диэлектрических жидкостей в сильном вертикальном или горизонтальном электрическом поле. Для достижения этой цели были поставлены и решены следующие задачи:

1. Аналитическое исследование процесса развития электрогидродинамической неустойчивости поверхности раздела диэлектрических жидкостей с различными физическими свойствами в вертикальном электрическом поле.
2. Развитие подходов, позволяющих значительно упростить нелинейные уравнения движения идеальных диэлектрических жидкостей в электрическом поле.
3. Описание эволюции слабо-нелинейных волн на поверхности раздела жидких диэлектриков в горизонтальном электрическом поле, в том числе и при наличии тангенциального разрыва скоростей на границе жидкостей.
4. Разработка новых, эффективных методов численного описания взаимодействия сильно-нелинейных волн на границе раздела жидкость-газ в горизонтальном электрическом поле.
5. Численное моделирование процесса взаимодействия сильно-нелинейных волн на свободной поверхности непроводящей жидкости с высокой диэлектрической проницаемостью

в сильном горизонтальном электрическом поле.

### **Научная новизна:**

- В рамках канонического формализма получены интегро-дифференциальные уравнения, описывающие динамику развития неустойчивости границы раздела диэлектрических жидкостей в вертикальном электрическом поле с учетом квадратичных нелинейностей.
- Показано, что на границе раздела жидкостей в сильном вертикальном электрическом поле за конечное время формируются слабые корневые особенности, для которых кривизна поверхности становится бесконечной.
- Выявлен особый (редуцированный) режим движения поверхности раздела жидкостей в вертикальных электрическом и гравитационном полях, для которого потенциалы электрического поля и скорости жидкостей оказываются линейно зависимыми величинами. В этом режиме жидкости движутся вдоль силовых линий электрического поля.
- Для ситуации, когда неустойчивость Кельвина-Гельмгольца границы раздела жидких диэлектриков стабилизируется внешним горизонтальным электрическим полем, продемонстрирована возможность построения широкого класса точных решений, описывающих взаимодействие слабо-нелинейных поверхностных волн.
- Показано, что слабо-нелинейные волны на границе раздела непроводящих жидкостей, отношение плотностей которых равно отношению их диэлектрических проницаемостей, могут распространяться без искажений вдоль направления внешнего горизонтального поля; для 3D-геометрии получено общее решение, описывающее взаимодействие встречных волн.
- Впервые в рамках метода динамических конформных преобразований проведено численное моделирование процесса взаимодействия сильно-нелинейных волн на свободной границе жидкого диэлектрика в горизонтальном электрическом поле.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Проведенное систематическое исследование нелинейной динамики поверхности раздела жидкостей, находящихся

в электрическом поле, позволило классифицировать основные режимы поведения системы. Результаты работы свидетельствуют о том, что горизонтальное электрическое поле может обеспечить устойчивость поверхности раздела жидкостей по отношению к возмущениям значительной амплитуды.

Впервые осуществлено моделирование сильно-нелинейной динамики свободной поверхности непроводящей жидкости в горизонтальном электрическом поле в рамках динамических конформных преобразований. Реализованные алгоритмы демонстрируют высокую эффективность и точность расчетов.

Полученные в диссертации точные аналитические решения, описывающие начальные стадии развития неустойчивости поверхности раздела жидкостей в вертикальном электрическом поле, могут быть использованы для верификации результатов численных экспериментов.

**Методы исследования.** Для вывода интегро-дифференциальных уравнений движения поверхности раздела идеальных диэлектрических жидкостей, находящихся в электрическом поле, использованы методы гамильтоновой механики, развитые в работах В. Е. Захарова, Е. А. Кузнецова [5] и J. C. Luke [6]. Численное моделирование динамики поверхностных волн на свободной границе жидкости в горизонтальном электрическом поле проводилось в рамках метода динамических конформных преобразований. В работе также применялся метод упрощения (редукции) исходных нелинейных уравнений электрогидродинамики, основанный на рассмотрении особого режима движения жидкостей, при котором потенциалы скорости жидкостей и электрического поля линейно связаны.

### **Положения, выносимые на защиту:**

1. Аналитические решения уравнений движения диэлектрических жидкостей с поверхностью раздела в сильном вертикальном электрическом поле. Согласно им на границе формируются корневые особенности, для которых кривизна поверхности обращается в бесконечность, а углы наклона остаются малыми.
2. Возможна реализация особого режима движения жидкостей, для которого потенциалы скорости жидкостей и электрического поля функционально связаны. Начальные стадии развития электрогидродинамической неустойчивости поверхности раздела жидкостей в

этом режиме описываются известным уравнением лапласовского роста, согласно которому происходит формирование острий и пальцеобразных возмущений на поверхности.

3. В состоянии нейтрального равновесия, когда внешнее горизонтальное электрическое поле полностью стабилизирует неустойчивость Кельвина-Гельмгольца, на границе раздела жидкостей могут распространяться пространственно локализованные волны. При взаимодействии таких волн возможно образование устойчивого волнового пакета.
4. Слабо-нелинейные волны на поверхности раздела диэлектрических жидкостей, отношение плотностей которых близко к отношению их проницаемостей, могут распространяться без искажений вдоль направления приложенного сильного горизонтального электрического поля. Взаимодействие происходит только между встречными волнами, которые восстанавливают свою форму и фазу после столкновения.
5. Взаимодействие встречных сильно-нелинейных волн на свободной поверхности непроводящей жидкости с высокой проницаемостью в горизонтальном электрическом поле является упругим (энергия и импульс каждой волны сохраняются). В результате взаимодействия меняется геометрия волн; степень деформации определяется четвертой степенью амплитуды, т.е. эффект является слабым. Многократное столкновение волн приводит к формированию на поверхности областей со значительной плотностью энергии электрического поля.

**Апробация результатов работы.** Основные результаты докладывались на следующих конференциях:

1. Fourth International Conference "Nonlinear Dynamics - 2013". Севастополь. 2013 г.
2. XI, XII, XIII, XIV Всероссийские школы-семинары по проблемам физики конденсированного состояния вещества. Екатеринбург. 2010 г., 2011 г., 2012 г., 2013 г.
3. X Международная конференция "Волновая электрогидродинамика проводящей жидкости". Ярославль. 2013 г.
4. VI International conference "SOLITONS, COLLAPSES AND TURBULENCE: Achievements, Developments and Perspectives". Новосибирск. 2012 г.



5. X Международная научная конференции "Современные проблемы электрофизики и электрогидродинамики жидкостей". Санкт-Петербург. 2012 г.
6. Российская конференция по магнитной гидродинамике. Пермь. 2012 г.
7. XVI Научная школа "Нелинейные волны - 2012". Нижний Новгород. 2012 г.
8. XI Международная конференция "ЗАБАБАХИНСКИЕ НАУЧНЫЕ ЧТЕНИЯ". Снежинск. 2012 г.
9. XIX, XX Научные сессии Совета РАН по нелинейной динамике. Москва. 2010 г., 2011г.
10. 17 Всероссийская научная конференция студентов-физиков и молодых ученых (ВНКСФ-17). Екатеринбург. 2011 г.
11. XVII Зимняя школа по механике сплошных сред. Пермь. 2011 г.

**Степень достоверности научных результатов.** Обоснованность и достоверность результатов исследования определяются использованием современных аналитических методов описания динамики поверхности жидкостей, позволивших получить ряд точных решений задачи. Достоверность результатов численного моделирования обеспечивается согласием полученных данных с известными частными решениями. В целом, полученные в работе результаты демонстрируют хорошее согласие с результатами других авторов и данными экспериментов.

**Личный вклад автора.** Автор принимал участие в разработке подходов к описанию движения жидкостей в электрическом поле, основанных на нетривиальных редукциях уравнений движения. Совместно с Н. М. Зубаревым получен широкий класс точных частных решений, описывающих слабо-нелинейную динамику поверхности раздела диэлектрических жидкостей в сильном электрическом поле.

Автором диссертации самостоятельно предложено обобщение метода динамических конформных преобразований, применимое для описания эволюции сильно-нелинейных волн на свободной границе непроводящей жидкости в электрическом поле. Автором разработана компьютерная программа для расчета взаимодействия встречных сильно-нелинейных электро-

гидродинамических волн на границе жидкости. Все численные расчеты и большая часть аналитических расчетов проводились автором лично.

**Публикации.** По теме диссертации опубликовано 18 печатных работ, из них 5 — в рецензируемых научных журналах и 13 — в сборниках трудов конференций, входящих в список литературы под номерами [96–98, 120, 134] и [99–101, 114–116, 121–126, 133], соответственно.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, пяти глав и заключения. Диссертация изложена на 138 страницах, включая 25 рисунков, 2 таблицы. Список литературы содержит 134 наименования.

ВО ВВЕДЕНИИ обоснована актуальность темы исследования, сформулированы цель работы, ее научная новизна и практическая значимость, приведено краткое содержание работы.

В ПЕРВОЙ ГЛАВЕ описаны основные результаты экспериментальных и теоретических исследований нелинейной динамики жидкостей со свободными и контактными границами в электрическом поле. Изложены основы используемых в работе методов теоретического описания динамики поверхности жидкости, таких как гамильтоновский формализм, редукции уравнений движения, динамические конформные преобразования.

ВО ВТОРОЙ ГЛАВЕ исследованы нелинейные стадии неустойчивости поверхности раздела диэлектрических жидкостей в сильном вертикальном электрическом поле. В рамках квадратично-нелинейной модели получены точные частные решения, описывающие формирование слабых корневых особенностей на границе, для которых в бесконечность обращается кривизна поверхности, а углы наклона остаются малыми. Отметим, что полученные решения применимы вплоть до момента формирования сингулярности.

В ТРЕТЬЕЙ ГЛАВЕ исследована динамика границы раздела жидких диэлектриков под действием вертикальных электрического и гравитационного полей. Показано, что для границы раздела жидкостей, отношение плотностей которых равно обратному отношению их проницаемостей реализуется особый (редуцированный) режим движения жидкостей, при котором потенциалы скорости жидкостей пропорциональны потенциалам электрического поля. С физической точки зрения это означает, что существует система координат, в общем случае неинерциальная, в которой жидкости двигаются вдоль силовых линий электрического

поля. В рамках малоуглового приближения продемонстрировано, что существует тенденция к формированию точек заострения и пальцеобразных структур на поверхности.

В ЧЕТВЕРТОЙ ГЛАВЕ исследовано стабилизирующее влияние горизонтального электрического поля на динамику поверхности раздела жидкостей при наличии, и в отсутствие тангенциального скачка скоростей на границе, обуславливающего развитие неустойчивости Кельвина-Гельмгольца. Показано, что в условии нейтрального равновесия по границе раздела жидкостей, отношение плотностей которых равно обратному отношению их проницаемостей, могут распространяться уединенные солитоноподобные возмущения. Пара таких волн может образовывать структурно устойчивый пакет волн — бризер. Показано, что в отсутствие скачка скоростей слабо-нелинейные волны могут распространяться без искажений с постоянной скоростью по границе раздела жидкостей, отношение плотностей которых равно отношению их проницаемостей. Получено общее решение, описывающее взаимодействие таких волн в 3D-геометрии.

В ПЯТОЙ ГЛАВЕ исследован процесс взаимодействия сильно-нелинейных волн на свободной границе непроводящей жидкости в горизонтальном электрическом поле. Показано, что взаимодействие встречных уединенных волн обладает следующим фундаментальным свойством: энергия и импульс каждой волны остаются неизменными, т.е. взаимодействие волн является упругим. Численно показано, что взаимодействие встречных волн может привести к формированию областей с высокой кривизной поверхности. В особых точках значительно увеличивается плотность энергии электрического поля. Наблюдаемая тенденция к локализации энергии поля может приводить к пробое жидкого диэлектрика.

В ЗАКЛЮЧЕНИИ диссертационной работы сформулированы основные результаты.

Работа выполнена в Лаборатории нелинейной динамики Института электрофизики УрО РАН. Данная работа осуществлялась при поддержке РФФИ (проект 14-08-31194-мол\_а, рук. Кочурин Е.А.), а также фонда "Династия".

# Глава 1. Нелинейная динамика поверхности жидкости в электрическом поле: обзор литературы

## 1.1 Результаты экспериментальных исследований

Широко известно, что свободная поверхность жидкости, а также граница раздела двух жидкостей неустойчивы в достаточно сильном вертикальном электрическом или магнитном поле. Одним из видов подобной неустойчивости является неустойчивость Тонкса-Френкеля, возникающая на свободной поверхности проводящей жидкости [7–9]. Воздействие достаточно сильного электрического поля 0.1-1 МВ/см на границу жидкого металла приводит к взрывному росту возмущений границы и формированию точек заострения поверхности, в которых реализуются условия инициации интенсивных эмиссионных процессов.

Хорошо изучена также неустойчивость свободной поверхности жидкого гелия [10–14]. Важной особенностью жидкого гелия является то, что на его границе может возникать свободный электрический заряд (локализованные над поверхностью электроны), обеспечивающий эквипотенциальность границы на характерных гидродинамических временах и масштабах. Подобная ситуация аналогична реализующейся для заряженной поверхности проводящей жидкости, с той разницей, что электрическое поле может проникать в жидкий гелий. Динамика развития неустойчивости может привести к формированию точек заострения на границе жидкого гелия, и, впоследствии, к зарождению заряженных пузырьков, уносящих заряд со свободной поверхности, см. Рисунок 1.1.

Экспериментально исследованы процессы развития электрогидродинамической неустой-

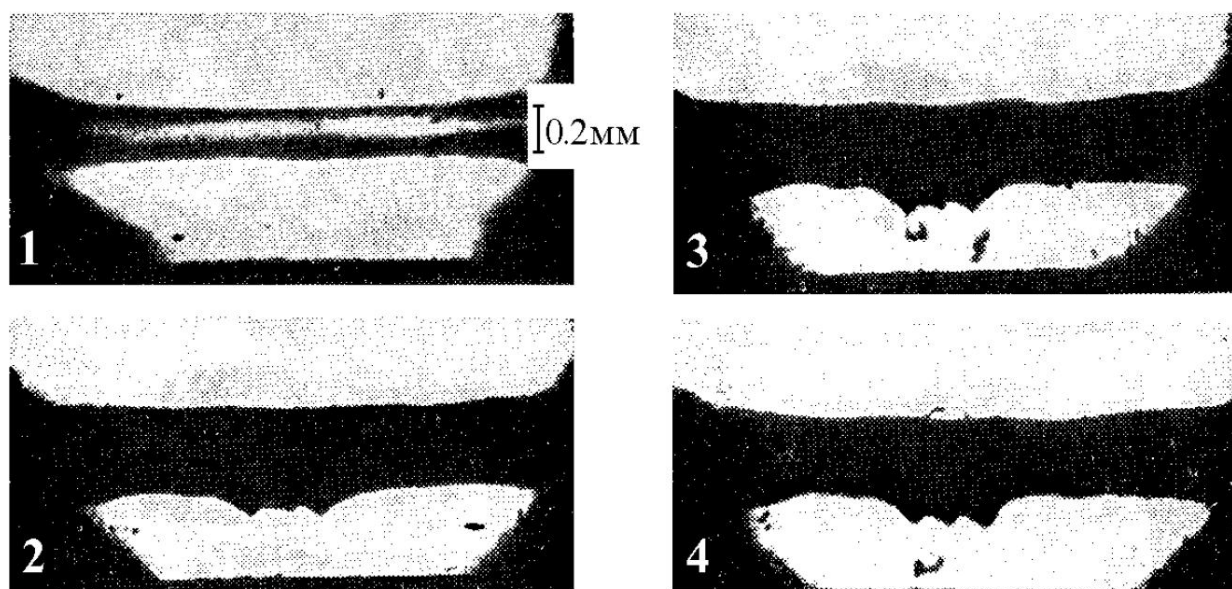


Рисунок 1.1: Последовательные кадры кинофильма, показывающие возбуждение электрокапиллярных волн на заряженной границе  ${}^4\text{He}$  в вертикальном электрическом поле [11].

чивости границы раздела диэлектрических жидкостей, а также границы ферромагнитных жидкостей в вертикальном магнитном поле [2, 15–19]. Отметим, что с математической точки зрения данные задачи эквивалентны. Как и для случая неустойчивости Тонкса-Френкеля поверхность раздела жидких диэлектриков на начальных стадиях развития неустойчивости испытывает аперiodический рост амплитуды возмущения поверхности. На Рисунке 1.2 показаны нелинейные образования на границе раздела жидкостей в вертикальном электрическом поле, полученные А. И. Жакиным в работе [19]. Локализованные возмущения, показанные на Рисунке 1.2, формируются при достаточно больших закритических напряжениях (напряженность поля порядка 10-100 кВ/см). Следует отметить, что в работе [19] наблюдалось богатое разнообразие форм развивающихся возмущений, в частности, периодические возмущения, системы лунок и уединенные гребни с остроконечными вершинами. Развитие той или иной формы возмущений существенно зависело от начальных условий.

Важным техническим приложением электрогидродинамики жидкостей с поверхностью раздела является получение микро- и наномасштабных частиц и струй путем так называемого электроспиннинга [21, 22]. Электроспиннинг — процесс формирования заряженной струи на поверхности раздела жидкостей в вертикальном электрическом поле. Отрыв струи с поверхности жидкости сопровождается формированием конического острия — конуса Тейлора. На Рисунке 1.3 представлены теневые снимки поверхности раздела органического масла и воды в вертикальном электрическом поле, полученные Дж. Тейлором в работе [21]. Левый снимок

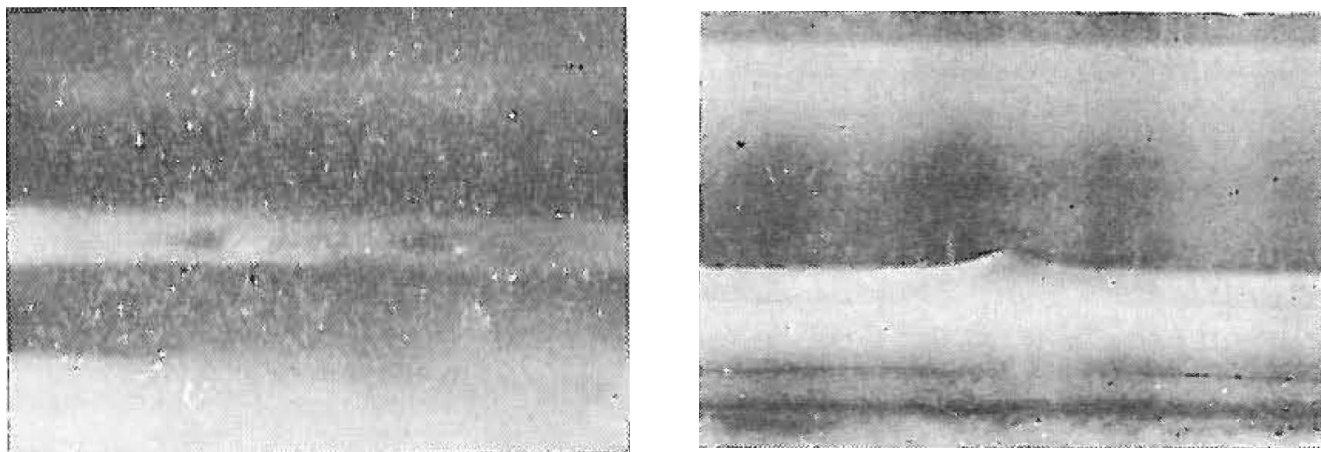


Рисунок 1.2: Показаны лунки (слева) и пикообразное возмущение (справа) на границе раздела трансформаторного масла и глицерина в вертикальном однородном электрическом поле [19].

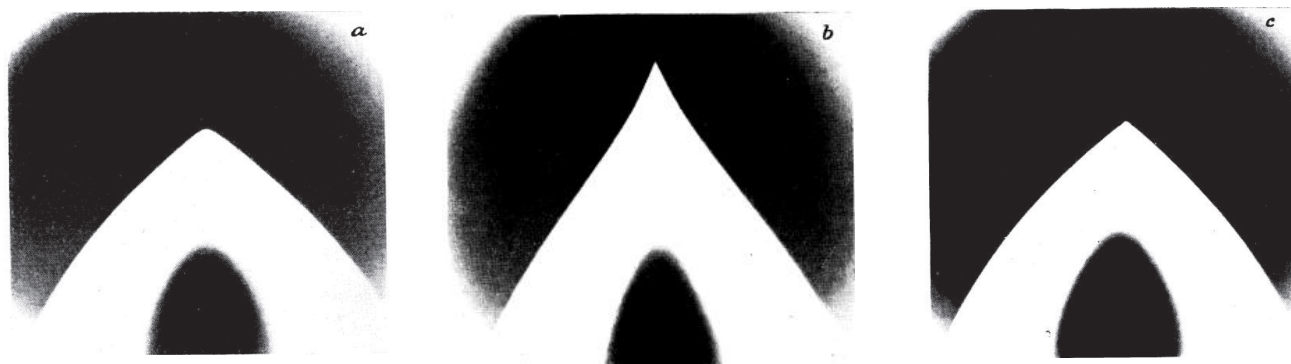


Рисунок 1.3: Формирование конуса Тейлора на границе раздела органического масла и воды в вертикальном электрическом поле [21], напряженность поля составляла порядка 10 кВ/см.

на Рисунке 1.3 соответствует моменту времени до отрыва струи, центральный — моменту ее формирования струи, а правый — после ее отрыва. В итоге на поверхности раздела жидкостей формируется стационарное коническое возмущение с углом раствора в  $98.6^\circ$ . Сам же процесс формирования конуса Тейлора и отрыва струи является достаточно сложным динамическим явлением, описание которого возможно только в рамках нелинейных уравнений движения.

Электрическое поле, направленное касательно к невозмущенной границе раздела жидкостей, напротив, оказывает стабилизирующее влияние на поверхность раздела [3, 20]. С практической точки зрения, горизонтальное электрическое поле может быть использовано для подавления различного рода гидродинамических неустойчивостей границы жидкостей. В частности, внешнее электрическое поле может стабилизировать так называемую неустойчивость Релея-Тейлора, которая развивается в случае, если верхняя жидкость является более плотной [23]. На Рисунке 1.4 представлены снимки, полученные в обзоре [20], поверхно-

сти раздела несмешиваемых жидкостей различной плотности под действием электрического поля в процессе развития неустойчивости Релея-Тейлора. Видно, что электрическое поле действительно стабилизирует поверхность раздела диэлектрических жидкостей (в данном случае — поверхность раздела органического и минерального масел). Следует отметить, что в работе [3] наблюдались также нелинейные волны на границе диэлектрической жидкости во внешнем горизонтальном электрическом поле, скорость распространения которых была пропорциональна его напряженности. Линейный теоретический анализ, проведенный в [3], показал, что горизонтальное электрическое поле всегда стабилизирует поверхность жидкого диэлектрика. Однако, на границе жидкостей с конечной проводимостью может развиваться электрогидродинамическая неустойчивость в горизонтальном электрическом поле.

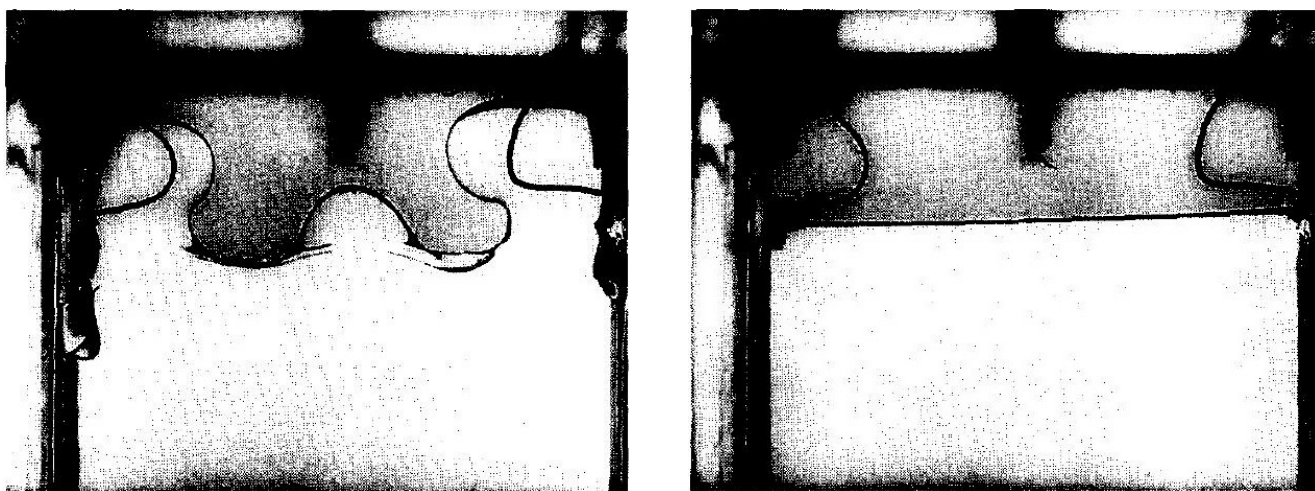


Рисунок 1.4: Стабилизация неустойчивости Релея-Тейлора поверхности раздела кукурузного (верхняя жидкость) и силиконового (нижняя жидкость) масел внешним электрическим полем [20]; на левом рисунке электрическое поле отсутствует, на правом — электрическое поле включено.

Как видно из приведенных фотографий процесс развития возмущений границы раздела жидкостей в однородном электрическом поле (вертикальном или горизонтальном) является существенно нелинейным физическим явлением (считается, что для линейных процессов углы наклона поверхности малы). Описание динамики поверхности должно строиться на основе совместного решения нелинейных уравнений гидродинамики и уравнений Максвелла. В настоящее время не существует общего подхода к аналитическому решению полной системы уравнений движения жидкостей с границей раздела. Тем не менее в последние десятилетия активно развивается теория нелинейных волн на границе жидкостей в электрическом поле; обзору теоретических работ в данной области посвящен следующий Разд. 1.2.

## 1.2 Результаты теоретических исследований

Как было отмечено выше, достаточно сильное внешнее электрическое поле, направленное по нормали к свободной поверхности диэлектрической жидкости, либо поверхности раздела двух жидкостей, обуславливает развитие апериодической неустойчивости границы [1, 2, 4]. Как следствие, система приходит к состоянию, в котором определяющую роль в эволюции поверхности начинают играть нелинейные эффекты [24–26]. Что касается анализа динамики поверхности жидкости в стабилизирующем горизонтальном электрическом поле, он был впервые проведен Дж. Мельчером и Дж. Тейлором в работах [3, 4].

Отметим, что недавно, были опубликованы прекрасные обзоры В. Б. Шикина и А. И. Жакина в УФН [10, 18], в которых подробно описаны результаты исследований поведения жидкостей с различными физическими свойствами в электрическом поле. Поэтому в настоящем разделе мы упомянем лишь ограниченное число работы, которые имеют непосредственное отношение к теме диссертационного исследования.

Общим подходом к описанию поведения системы двух жидкостей с поверхностью раздела, либо одной жидкости со свободной поверхностью является редукция исходных уравнений, описывающих течение жидкостей, к уравнениям более низкой размерности на движение непосредственно границы. Возникающие при этом уравнения в общем случае будут нелокальными (т.е. они будут включать в себя интегро-дифференциальные операторы), что затрудняет их исследование. При этом большинство работ, рассматривающих нелинейные процессы на поверхности диэлектрических жидкостей, используют либо предположение о том, что длина волны намного превышает глубину слоя жидкости (так называемое приближение мелкой воды) (см., к примеру, работы [27–35] в которых аналитически исследовалась динамика локализованных возмущений – солитонов), либо требование спектральной узости волнового пакета, позволяющее применять метод огибающих; работы [36–44] позволили определить условия устойчивости пакетов нелинейных волн, распространяющихся по поверхности раздела жидкостей в электрическом поле. Оба подхода, накладывая свои ограничения на форму возмущений, дают возможность свести исходную задачу к рассмотрению сравнительно простых (локальных) уравнений в частных производных. Так, приближение мелкой воды обычно приводит к различным модификациям уравнения Кортевега - де Фриза, а метод



оггибающих – к модификациям нелинейного уравнения Шредингера. В силу своих ограничений эти уравнения не применимы к описанию таких интересных с физической точки зрения явлений, как опрокидывание поверхностных волн.

Как правило, развитие гидродинамических неустойчивостей может быть описано аналитически только на начальной стадии, когда применимо приближение малости углов наклона поверхности и, следовательно, эволюция границы может быть описана в рамках линейной и слабо-нелинейной теории (см. [34, 37–39, 41, 44, 45]). Аналитические модели развития неустойчивости Релея-Тейлора, развиваемые в работах [46, 47], показали, что существует тенденция к формированию пальцеобразных возмущений и точек заострения на границе раздела жидкостей. Описание процесса формирования таких (сильных) особенностей выходит за рамки малоуглового приближения, используемого в работах [46, 47]. Отметим работу [32], в которой авторы провели слабо-нелинейное аналитическое и сильно-нелинейное численное исследование электрогидродинамической неустойчивости поверхности раздела диэлектрических и слабо проводящих жидкостей. Им удалось показать, что на границе жидкостей в вертикальном электрическом поле формируются структуры, схожие с пальцеобразными возмущениями, наблюдаемыми при развитии неустойчивости Релея-Тейлора. Из всего вышесказанного следует, что малоугловое приближение неизбежно нарушается на развитых стадиях развития неустойчивости, при которых амплитуда возмущения поверхности становится сравнимой с длиной волны. В этой связи, необходимо разработать подходы для изучения волн конечной амплитуды.

Стабилизацию поверхности раздела жидкостей, испытывающей различного рода гидродинамические неустойчивости может обеспечить электростатическое давление, оказываемое внешним электрическим полем, направленным по касательной к невозмущенной границе раздела жидкостей. В частности, одним из наиболее распространенных типов гидродинамических неустойчивостей является неустойчивость Кельвина-Гельмгольца, возникающая при наличии сдвига между слоями сплошной среды, либо когда две контактирующие среды имеют разные скорости [48]. С прикладной точки зрения неустойчивость Кельвина-Гельмгольца может являться нежелательным эффектом.

В рамках приближения спектральной узости волнового пакета в работах [49, 50] были изучены нелинейные стадии развития неустойчивости Кельвина-Гельмгольца, подавляемой

электрическим полем. Процесс стабилизации неустойчивости Релея-Тейлора внешним тангенциальным электрическим полем исследован, например, в работах [51, 52]. В них авторам удалось найти условия, при которых на границе раздела будут распространяться слабо-нелинейные волны, амплитуды которых не нарастают со временем. Особенности распространения нелинейных волн конечной амплитуды на поверхности жидкости в горизонтальном электрическом поле и при отсутствии дестабилизирующих факторов рассматривались в работах [53–57]. Стоит отметить отдельно работы [54, 58], в которых численно исследовалась динамика электрокапиллярных волн значительной амплитуды на поверхности слоя диэлектрической жидкости. Полученные результаты говорят о том, что на поверхности могут распространяться электрокапиллярные волны без искажений, т.е. без дисперсии. Данные результаты являются обобщением точных решений, полученных в работе [59], на случай слоя жидкости, помещенной в горизонтальное электрического поля.

В работах [60, 61] для проводящих жидкостей, а в работах [62, 63] для диэлектрических жидкостей с проводящей поверхностью (например, жидкий гелий с заряженной поверхностью [13]) было продемонстрировано, что эволюцию границы можно эффективно исследовать аналитически в пределе сильного поля, когда считается, что движение границы целиком определяется электростатическими силами, а капиллярные и гравитационные силы не учитываются. При этом не использовалось ни длинноволновое, ни квазимонохроматическое приближения; удалось напрямую проинтегрировать интегро-дифференциальные уравнения на движение границы. Исследования [64–67] показали, что в отдельных случаях возможен существенный прогресс в аналитическом исследовании динамики границы жидкости в горизонтальном электрическом поле.

В заключение текущего раздела отметим, что аналитическое исследование нелинейной динамики поверхности раздела диэлектрических жидкостей во внешнем электрическом поле, на основе полных интегро-дифференциальных уравнений, до сих пор не проводилось систематически. Однако, по нашему мнению, существенный прогресс может быть достигнут при использовании новых методов описания динамики поверхности жидкости, основанных на каноническом формализме, поиске редукций уравнений движения и методах динамического конформного преобразования.

## 1.3 Методы теоретического описания нелинейной динамики поверхности жидкости

**Гамильтоновский формализм.** Благодаря классическим работам В. Е. Захарова, Е. А. Кузнецова и, отдельно, J. С. Luke см. работы [5, 6, 68, 69] известно, что уравнения гидродинамики идеальной жидкости со свободной поверхностью приводятся к каноническим переменным; этими переменными являются форма поверхности  $\eta(x, y, t)$  (обобщенная координата) и гидродинамический потенциал на поверхности  $\psi(x, y, t)$  (обобщенный импульс). Здесь мы ввели декартову систему координат так, чтобы поверхность жидкости в невозмущенном состоянии представляла собой плоскость  $z = 0$ , оси  $x$  и  $y$  лежат в этой плоскости. Для границы раздела жидкостей роль обобщенного импульса играет величина

$$\psi = (\rho_1 \Phi_1 - \rho_2 \Phi_2)_{z=\eta},$$

где  $\rho_1, \rho_2$  — плотности жидкостей,  $\Phi_1, \Phi_2$  — потенциалы скорости жидкостей.

Уравнения движения свободной поверхности идеальной жидкости в поле тяжести в отсутствии внешнего электрического поля представимы в виде

$$\eta_t = \frac{\delta H}{\delta \psi}, \quad \psi_t = -\frac{\delta H}{\delta \eta}, \quad (1.1)$$

где  $H$  — гамильтониан, совпадающий с полной энергией системы:

$$H = \int_{z \leq \eta} \frac{(\nabla \Phi)^2}{2} d^3 r + \frac{g}{2} \int \eta^2 d^2 r,$$

где  $g$  — ускорение свободного падения,  $\Phi$  — потенциал скорости жидкости, удовлетворяющий уравнению Лапласа

$$\Delta \Phi = 0, \quad z < \eta(x, y, t).$$

Движение жидкости затухает на бесконечной глубине:

$$\Phi = 0, \quad z \rightarrow -\infty.$$

Граничными условиями (кинематическим и динамическим) к уравнению Лапласа являются:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \eta}{\partial t} &= \frac{\partial \Phi}{\partial z} - (\nabla_{\perp} \eta \cdot \nabla_{\perp} \Phi), & z = \eta(x, y, t) \\ \frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla \Phi)^2 &= -g\eta, & z = \eta(x, y, t),\end{aligned}$$

где  $\nabla_{\perp}$  — двумерный градиент в плоскости  $(x, y)$ . Они эквивалентны уравнениям Гамильтона (1.1).

Гамильтониан  $H$  есть сумма кинетической и потенциальной энергий системы. В общем случае он содержит также слагаемые, ответственные за капиллярные и электростатические силы:

$$\begin{aligned}H_{\sigma} &= \sigma \int (\sqrt{1 + (\nabla_{\perp} \eta)^2} - 1) d^2 r, \\ H_E &= -\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1}{2} \int_{z \leq \eta} [(\nabla \varphi_1)^2 - E_1^2] d^3 r - \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_2}{2} \int_{z \geq \eta} [(\nabla \varphi_2)^2 - E_2^2] d^3 r,\end{aligned}$$

где  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $\varepsilon_0$  — электрическая постоянная,  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  — диэлектрические проницаемости контактирующих сред,  $E_1$  и  $E_2$  — значения напряженности электрического поля на бесконечном удалении от границы жидкости (при  $z \rightarrow -\infty$  и  $z \rightarrow +\infty$ , соответственно),  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — потенциалы электрического поля внутри диэлектрических жидкостей. Отметим, что функции  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  также как и  $\Phi$  удовлетворяют уравнениям Лапласа, что с физической точки зрения соответствует условию отсутствия объемного заряда внутри жидкостей.

Использование гамильтоновского формализма является удобным инструментом исследования нелинейной динамики жидкости со свободной поверхностью, позволяющим значительно упростить выкладки при выводе уравнений движения границы.

**Малоугловое приближение.** Еще одним важным инструментом теоретического исследования эволюции жидкостей является теория возмущений по малому параметру — характерному углу наклона поверхности. Критерием применимости малоуглового приближения будет являться условие

$$|\nabla_{\perp} \eta| \sim \ll 1.$$

Для построения теории возмущений воспользуемся известными решениями уравнения Лапласа для полупространств  $z < 0$  и  $z > 0$  для затухающих на бесконечности функций  $f_1$  и  $f_2$

$$\begin{aligned} f_2(x, y, z) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z f_2(x', y', 0)}{[(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + z^2]^{3/2}} dx' dy', & z > 0. \\ f_1(x, y, z) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{z f_1(x', y', 0)}{[(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + z^2]^{3/2}} dx' dy', & z < 0, \end{aligned} \quad (1.2)$$

Разложим, например, потенциал скорости в степенной ряд по возмущениям поверхности раздела

$$\Phi(x, y, \eta(x, y)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\eta^n}{n!} \frac{\partial^n \Phi}{\partial z^n} \Big|_{z=0}. \quad (1.3)$$

Применяя формулу (1.2) для  $\Phi$  и дифференцируя получившееся выражение по  $z$  получим

$$\Phi_z|_{z=0} = \hat{k} \Phi|_{z=0},$$

где  $\hat{k}$  — двумерный интегральный оператор, задаваемый выражением

$$\hat{k}f = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(x', y')}{[(x' - x)^2 + (y' - y)^2]^{3/2}} dx' dy'.$$

Исключая производные по  $z$  из разложения (1.3), находим

$$\Phi(x, y, \eta(x, y)) = \hat{T}\Phi(x, y, 0),$$

где мы ввели нелинейный оператор

$$\hat{T} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\eta)^n \hat{k}^n}{n!}.$$

При помощи метода последовательных приближений можно определить вид оператора обратного к  $\hat{T}$

$$\hat{T}^{-1} = 1 + \eta \hat{k} - \eta^2 \hat{k}^2 / 2 + \eta \hat{k} \eta \hat{k} + \dots$$

В итоге, мы можем выразить функцию  $\Phi$  через каноническую переменную  $\psi$

$$\Phi(x, y, 0) = \hat{T}^{-1}\psi(x, y).$$

Это соотношение в сочетании с (1.2) задает решение уравнения Лапласа. Оно позволяет выразить подынтегральное выражение в гамильтониане через канонические переменные. Аналогичные выражения можно получить для потенциалов электрического поля.

Приведем гамильтониан для жидкости со свободной поверхностью, находящейся только в поле тяжести в квадратично-нелинейном приближении:

$$H = \int \left[ \frac{\psi \hat{k} \psi}{2} + \frac{g\eta^2}{2} + \frac{\sigma(\nabla_{\perp}\eta)^2}{2\rho} \right] d^2r.$$

Подробный вывод слагаемых, ответственных за действие электрического поля, будет дан в последующих главах.

**Редукция уравнений движения.** Как отмечалось ранее, исследование нелинейной динамики поверхности жидкости чрезвычайно сложная для аналитического описания задача. В этой связи, особое внимание следует обратить на методы, позволяющие существенно упростить нелинейные уравнения движения границы. Одним из таких подходов является рассмотрение особого режима движения жидкостей, при котором потенциалы скорости и потенциалы электрического поля жидкостей связаны линейной функциональной связью [70, 71]. Как следствие, количество уравнений, необходимых для описания поверхности раздела сокращается вдвое (уравнения движения редуцируются). С физической точки зрения данная редукция означает, что жидкость может двигаться вдоль силовых линий электрического поля. Исследования [70, 71] показали, что данный подход позволяет аналитически описать развитие электрогидродинамической неустойчивости свободной поверхности жидкого гелия вплоть до формирования особых точек на границе — точек заострения.

Отметим, что ситуация при которой жидкости могут двигаться вдоль силовых линий внешнего поля не является уникальной. Подобный режим реализуется, к примеру, для так называемых альфвеновских волн. Альфвеновские волны — это поперечные магнитогидродинамические плазменные волны, распространяющиеся вдоль силовых линий магнитного поля. Названы в честь шведского астрофизика Х. Альфвена, предсказавшего в 1942 году их

существование [72]. Опишем кратко основные свойства альфвеновских волн.

Уравнения для скорости  $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$  и магнитного поля  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  идеальной несжимаемой бесконечно проводящей однородной жидкости имеют вид [73]:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} &= -\nabla \left( \frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{B}^2}{2\rho} \right) + \frac{(\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B}}{2\rho}, \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{B} &= (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \\ \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \end{aligned}$$

где  $p(\mathbf{r}, t)$  — давление. Эти уравнения примут симметричный вид при введении альфвеновской скорости  $\mathbf{u} = \mathbf{B}/(2\rho)^{1/2}$ :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \nabla \left( \frac{p}{\rho} + \frac{\mathbf{u}^2}{2} \right), \quad (1.4)$$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = 0, \quad (1.5)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (1.6)$$

Несложно заметить, что уравнения (1.4), (1.5), (1.6) допускают стационарные решения, соответствующие динамическому равновесию:

$$p = \text{const} - \rho \mathbf{u}^2 / 2,$$

$$\mathbf{v} = \pm \mathbf{u}, \quad \partial \mathbf{v} / \partial t = 0.$$

Чандрасекар показал [74], что данный режим движения жидкости устойчив. Из этого решения следует, что волновой пакет распространяется без дисперсии. Любая начальная форма волны сохраняется. Для волн распространяющихся в одном направлении, справедлив принцип суперпозиции. Необходимо отметить, что волны, распространяющиеся в противоположных направлениях, будут взаимодействовать, что приводит к искажению волнового пакета. Так, взаимодействие встречных нелинейных альфвеновских волн может приводить к формированию турбулентного течения [75, 76].

В дальнейшем мы покажем, что сходный режим движения реализуется под действием

внешнего тангенциального электрического поля для свободной поверхности непроводящей жидкости с высокой диэлектрической проницаемостью.

**Динамическое конформное преобразование.** Мощным инструментом исследования нелинейной динамики жидкости является метод динамического конформного преобразования. Конформное преобразование координат — это такое преобразование, при котором сохраняются углы между кривыми. Как следствие в 2D-геометрии, для функций, удовлетворяющих уравнению Лапласа в исходном пространстве, справедливы уравнения Лапласа в новом конформном пространстве. Конформное преобразование области, занимаемой жидкостью в полуплоскость, может существенно упростить аналитическое и численное описание динамики жидкости. В новых (конформных) переменных  $(u, v)$  уравнения Лапласа для потенциала скорости жидкости решаются аналитически. В итоге исходная система уравнений сводится к системе нелинейных интегро-дифференциальных уравнений, описывающей движение непосредственно границы.

Традиционно конформные переменные использовались для решения стационарных задач, в частности, для описания плоского стационарного течения идеальной жидкости. Первые методы конформного преобразования для нестационарных задач были применены в работе Л.В.Овсянникова [77]. В недавних работах [78–80] получены новые более удобные уравнения, описывающие нелинейную динамику поверхностных волн. Изложим кратко вывод уравнений движения свободной поверхности жидкости в поле тяжести в конформных переменных.

Совершим конформное преобразование занимаемой жидкостью области на плоскости  $z \equiv x + iy$ , в нижнюю полуплоскость комплексной переменной  $w = u + iv$  (см. Рисунок 1.5):

$$-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \eta(x, t), \quad \implies \quad -\infty < u < \infty, \quad -\infty < v < 0.$$

Свободная поверхность будет соответствовать  $v = 0$ .

В новых переменных форма поверхности будет задаваться следующими параметрическими выражениями:

$$y = y(u, t), \quad x = x(u, t) = u + x'(u, t),$$



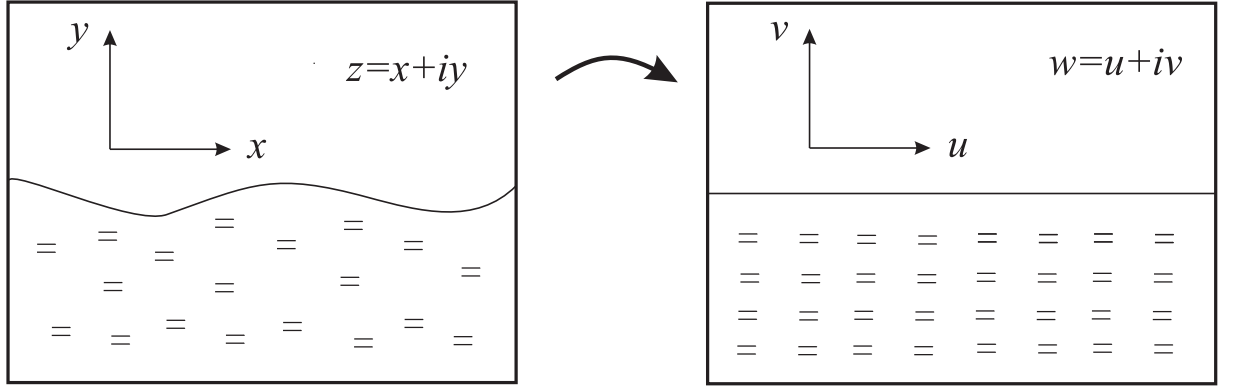


Рисунок 1.5: Схематически показано конформное преобразование области, занимаемой жидкостью, в полуплоскость.

где  $x'(u, t)$ ,  $y(u, t)$  — связаны следующими соотношениями

$$y = \hat{H}x', \quad x' = -\hat{H}y.$$

Здесь  $\hat{H}$  — преобразование Гильберта, определяемое как

$$\hat{H}f(u) = \frac{1}{\pi} \text{P.V.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(u') du'}{u' - u}, \quad \hat{H}^2 = -1.$$

Гамильтониан системы в новых переменных принимает вид

$$H = - \int_{-\infty}^{+\infty} \psi \hat{H} \psi_u du + \frac{g}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} y^2 x_u du.$$

Здесь  $\psi(u, t)$  — значение потенциала скорости, взятое на границе жидкости  $v = 0$ .

Из лагранжевого формализма [81] получаем уравнения движения

$$y_t = (y_u \hat{H} - x_u) \frac{\hat{H} \psi_u}{J}, \quad (1.7)$$

$$\psi_t = -\frac{\psi_u^2 + \hat{H} \psi_u^2}{2J} + \hat{H} \left( \frac{\hat{H} \psi_u}{J} \right) \psi_u + \frac{\hat{H} \psi_u}{J} \hat{H} \psi_u - gy, \quad (1.8)$$

где  $g$  — ускорение свободного падения,  $J = x_u^2 + y_u^2 = y_u^2 + 1 + 2x'_u + (x'_u)^2$  — якобиан преобразования. Таким образом, полная система уравнений движения свелась к паре интегродифференциальных уравнений (1.7) и (1.8). Отметим, что в недавних работах [82, 83] данная система обобщена на случай жидкости конечной глубины с произвольной формой дна.

Система (1.7) и (1.8) может быть значительно упрощена [80], если использовать комплексные функции  $z(u, t) = x + iy$ ,  $\Phi(u, t) = \psi + i\hat{H}\psi$ , аналитические в нижней комплексной полуплоскости переменной  $u$ , и сделать замену переменных

$$R = \frac{1}{z_u}, \quad V = i\frac{\Phi_u}{z_u}.$$

В новых переменных система (1.7) и (1.8) принимает вид

$$R_t = i(UR_u - U_uR), \quad (1.9)$$

$$V_t = i(UV_u - R\hat{P}(V\bar{V})_u) + g(R - 1), \quad (1.10)$$

где

$$\hat{P} = (1 + i\hat{H})/2, \quad U = \hat{P}(V\bar{R} + \bar{V}R).$$

Система уравнений (1.9) и (1.10) представляет собой систему нелинейных интегро-дифференциальных кубических уравнений удобную для численного интегрирования. В работах [84, 85] доказана их математическая корректность и представлены численные алгоритмы решения.

Отметим, что уравнения (1.9) и (1.10) не включают слагаемые, ответственные за действие внешнего электрического поля. В рамках конформных переменных  $(u, v)$  динамика развития электрогидродинамической неустойчивости поверхности жидкости со свободным поверхностным зарядом рассматривалась в работах [62, 63, 71, 86]. Отметим также работу [87], в которой авторам удалось описать стационарные электрокапиллярные волны на свободной поверхности жидкости с высокой проницаемостью в рамках уравнений (1.7) и (1.8) в горизонтальном электрическом поле. До настоящего момента времени не был известен вид уравнений в форме (1.9) и (1.10) с учетом электрического поля. В диссертации будут выведены уравнения движения свободной поверхности непроводящей жидкости в горизонтальном электрическом поле в терминах переменных Дьяченко  $R$  и  $V$ . Эти уравнения позволят промоделировать взаимодействие сильно-нелинейных электрогидродинамических волн.

## 1.4 Выводы к Главе 1

В настоящей главе были приведены основные результаты экспериментальных и теоретических исследований динамики поверхности раздела жидкостей в электрическом поле, позволяющие сделать следующие выводы:

1. В настоящее время детально экспериментально изучены процессы развития неустойчивости свободной поверхности проводящих и диэлектрических жидкостей в вертикальном электрическом поле. Существуют также обширные экспериментальные данные по поведению поверхности раздела диэлектрических жидкостей в электрическом поле. Для жидкостей сравнимой плотности эксперименты показали, что в вертикальном поле на их границе наблюдается большое разнообразие форм развивающихся возмущений, например: периодические возмущения, системы лунок, уединенные гребни с остроконечными вершинами [19, 20]. Исследовано стабилизирующее воздействие на поверхность раздела горизонтального электрического поля [3, 20]. Все перечисленные явления принципиально не могут быть описаны в рамках линейных моделей и, соответственно, требуют развития методов описания нелинейной динамики поверхности раздела жидкостей в электрическом поле.
2. Уравнения, описывающие динамику границы раздела жидкостей во внешнем электрическом поле, в общем случае, являются нелокальными, т.е. они содержат интегро-дифференциальные операторы. В то же время большинство теоретических работ, рассматривающих нелинейные процессы на поверхности жидких диэлектриков, используют либо приближение мелкой воды, либо требование спектральной узости волнового пакета, позволяющие свести уравнения к дифференциальным. Исследование электрогидродинамики поверхности раздела диэлектрических жидкостей сравнимой плотности в не рамок этих приближений до сих пор не проводилось систематически.
3. В течение последних десятилетий активно развиваются методы теоретического описания нелинейной динамики поверхности жидкостей. Одним из них является поиск редукций исходных уравнений движения. Так, работы [70, 71] показали, что существенный прогресс в аналитическом описании электрогидродинамической неустойчивости поверхности жидкого диэлектрика может быть достигнут при рассмотрении особого

режима движения жидкостей, при котором потенциалы электрического поля пропорциональны потенциалам скорости жидкостей. К настоящему моменту времени заложены основы описания динамики свободной поверхности жидкости в рамках канонического формализма, а также с использованием конформных переменных. Использование указанных методов представляется перспективным для анализа задач диссертации.

# Глава 2. Электрогидродинамическая неустойчивость поверхности раздела жидкостей

## 2.1 Введение

В настоящей главе будет рассмотрена эволюция поверхности раздела диэлектрических жидкостей в сильном вертикальном электрическом поле, т.е. без учета влияния капиллярных и гравитационных сил. Для этого мы воспользуемся каноническим формализмом для получения интегро-дифференциальных уравнений движения поверхности. Основной целью главы будет являться описание процесса формирования особенностей на границе жидкостей в вертикальном электрическом поле.

Будет показано, что в случае плоской симметрии задачи соответствующие уравнения движения, выведенные в приближении малости углов наклона поверхности, имеют точные решения для двух частных случаев: когда  $\varepsilon_1/\varepsilon_2 = \rho_1/\rho_2$  и когда  $\varepsilon_1/\varepsilon_2 = \rho_2/\rho_1$ . Здесь  $\rho_1$  и  $\rho_2$  — плотности нижней и, соответственно, верхней жидкостей (без потери общности можно считать, что  $\rho_1 > \rho_2$ , т.е. нижняя жидкость — тяжелая), а  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  — их диэлектрические проницаемости. В общем случае, когда нет ограничений на плотности и диэлектрические проницаемости, удалось построить приближенное решение уравнений.

Взаимодействие внешнего поля с поляризационными зарядами на границе раздела двух жидкостей обуславливает тенденцию к взрывному росту возмущений границы, направленных в сторону от жидкости с большей проницаемостью к жидкости с меньшей проницаемостью. Для первого случая справедливо  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ , и нелинейность определяет тенденцию

к росту бугров (т.е. прорастанию возмущений границы вверх - в направлении от тяжелой к легкой жидкости). Как будет продемонстрировано ниже, рост возмущений границы (бугров) на поверхности раздела приводит к формированию слабых корневых особенностей, для которых кривизна поверхности становится бесконечной, а углы наклона остаются сравнительно малыми. Подобное поведение сходно с поведением заряженной границы проводящей жидкости [60, 61]. Для второго случая будет  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ , так что нелинейность способствует развитию лунок в границе раздела (прорастанию возмущений границы вниз - в сторону от легкой к тяжелой жидкости). Найденные в работе решения уравнений движения демонстрируют тенденцию к формированию и неограниченному заострению лунок в границе раздела, т.е. на поверхности возникают сильные особенности, для которых наклон поверхности растет до углов в  $\pi/2$ , что в целом аналогично поведению заряженной границы жидкого гелия из работ [62, 63]. В общем случае на границе раздела жидкостей в сильном вертикальном электрическом поле формируются слабые корневые особенности, для которых бесконечной становится кривизна поверхности. При этом кривизна обращается в минус бесконечность для  $\varepsilon_1/\varepsilon_2 > \rho_2/\rho_1$  (что включает в себя первый случай, для которого  $\varepsilon_1/\varepsilon_2 = \rho_1/\rho_2$ ) и в плюс бесконечность для  $\varepsilon_1/\varepsilon_2 < \rho_2/\rho_1$ .

Глава построена следующим образом. В разд. 2.2 мы приводим основные уравнения движения идеальных несжимаемых диэлектрических жидкостей с поверхностью раздела в вертикальном электрическом поле, здесь же дается определение сильного электрического поля. В разд. 2.3 в рамках гамильтонова формализма получены интеро-дифференциальные уравнения движения границы раздела жидкостей с точностью до квадратично-нелинейных слагаемых. В разд. 2.4 приводится обсуждение условий реализации исследуемых режимов движения. Разд. 2.5 посвящен анализу динамики поверхности жидкости для первого случая  $\rho_1/\rho_2 = \varepsilon_1/\varepsilon_2$ . В следующем разд. 2.6 получены точные решения для случая  $\rho_1/\rho_2 = \varepsilon_2/\varepsilon_1$ . В разд. 2.7 предложена модель описания начальных стадий неустойчивости в общем случае. В разд. 2.8 содержатся основные выводы по текущей главе.

## 2.2 Исходные уравнения

Рассмотрим динамику границы раздела двух глубоких идеальных (непроводящих) ди-

электрических жидкостей с поверхностным поляризационным зарядом (свободные поверхностные заряды отсутствуют) во внешнем вертикальном электрическом поле. Будем считать обе жидкости невязкими и несжимаемыми, а их течение — безвихревым (потенциальным). Дисперсионное соотношение для линейных волн на поверхности раздела имеет вид [1, 4]:

$$\omega^2 = Ag|k| - \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)A_E E_1 E_2}{\rho_1 + \rho_2} k^2 + \frac{\sigma}{\rho_1 + \rho_2} |k|^3,$$

где  $k$  — волновое число;  $\omega$  — частота;  $g$  — ускорение свободного падения;  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения;  $\varepsilon_0$  — диэлектрическая проницаемость вакуума,  $A = (\rho_1 - \rho_2)/(\rho_1 + \rho_2)$  — число Атвуда ( $0 < A < 1$ ), и  $A_E = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$  его аналог для диэлектрических проницаемостей,  $E_1$  и  $E_2$  — напряженности электрического поля в нижней и верхней жидкости, связанные соотношением  $\varepsilon_1 E_1 = \varepsilon_2 E_2$  (здесь и ниже индекс "1" относится к нижней жидкости, а индекс "2" — к верхней).

Из дисперсионного соотношения можно видеть, что если внешнее электрическое поле достаточно велико

$$E_1 E_2 \gg \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{\varepsilon_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2} \sqrt{g\sigma(\rho_1 - \rho_2)}, \quad (2.1)$$

то второе слагаемое в правой части дисперсионного соотношения является доминирующим в следующем диапазоне волновых чисел

$$\frac{g(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)(\rho_1 - \rho_2)}{\varepsilon_0 E_1 E_2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2} \ll k \ll \frac{\varepsilon_0 E_1 E_2 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{\alpha(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}.$$

В этом диапазоне можно не учитывать влияние силы тяжести и капиллярных сил.

Движение жидкостей может рассматриваться как потенциальное, если электростатические силы доминируют над вязкими. Данное условие реализуется для волновых чисел

$$k^2 \ll \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)A_E E_1 E_2}{\nu^2(\rho_1 + \rho_2)}, \quad (2.2)$$

где  $\nu$  — кинематическая вязкость более вязкой жидкости. Данное неравенство соответствует большому числу Рейнольдса ( $Re \sim \omega k^{-2} \nu^{-1}$ ), для которого эффектами вязкости можно пренебречь (см. подробнее [35]).

В невозмущенном состоянии поверхность раздела представляет собой плоскость. Введем декартову систему координат таким образом, что оси  $x$  и  $y$  лежат в этой плоскости.

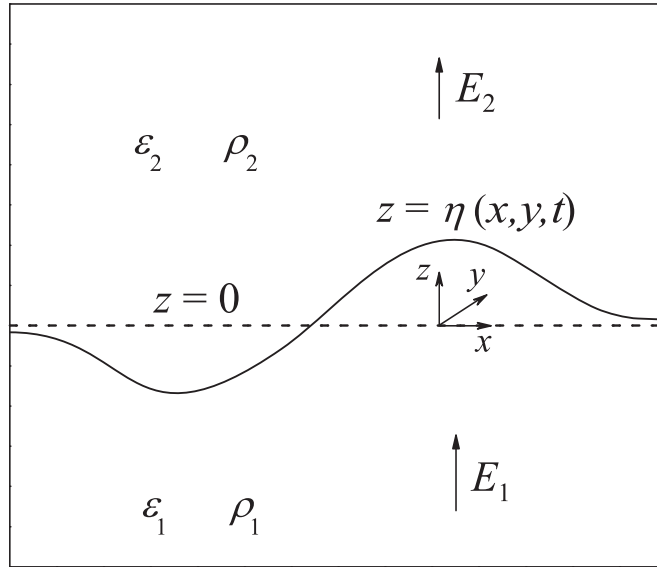


Рисунок 2.1: Схематическое изображение геометрии задачи.

Напряженность внешнего электрического поля направлена по оси  $z$  перпендикулярно невозмущенной границе. Будем считать, что отклонение поверхности раздела от плоскости  $z = 0$  задается функцией  $\eta(x, y, t)$ , т.е. уравнение  $z = \eta$  определяет профиль границы (см. Рисунок 2.1, где схематически изображена геометрия задачи).

Потенциалы скорости  $\Phi_{1,2}$  и электрического поля  $\varphi_{1,2}$  обеих жидкостей будут удовлетворять уравнениям Лапласа:

$$\nabla^2 \Phi_{1,2} = 0, \quad \nabla^2 \varphi_{1,2} = 0.$$

На границе раздела должно выполняться условие равенства нормальных компонент скоростей верхней и нижней жидкостей:

$$\partial_n \Phi_1 = \partial_n \Phi_2, \quad z = \eta(x, y, t), \quad (2.3)$$

где  $\partial_n$  — производная в направлении нормали к поверхности  $z = \eta$ :

$$\partial_n = \frac{\partial_z - \nabla_{\perp} \eta \cdot \nabla_{\perp}}{\sqrt{1 + (\nabla_{\perp} \eta)^2}}.$$

Здесь  $\nabla_{\perp}$  — двумерный градиент в плоскости  $x$  и  $y$ . Для потенциалов электрического поля должны выполняться следующие граничные условия:

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \varepsilon_1 \partial_n \varphi_1 = \varepsilon_2 \partial_n \varphi_2, \quad z = \eta(x, y, t), \quad (2.4)$$



соответствующие требованиям непрерывности тангенциальной компоненты напряженности электрического поля и нормальной компоненты вектора электрической индукции. На бесконечном удалении от границы движение жидкостей затухает, а электрическое поле становится однородным, то есть

$$\Phi_{1,2} \rightarrow 0, \quad \varphi_{1,2} \rightarrow -E_{1,2}z, \quad z \rightarrow \mp\infty.$$

Как известно [5, 25, 88], уравнения, описывающие движение границы  $z = \eta$ , представимы в форме уравнений Гамильтона

$$\psi_t = -\frac{\delta H}{\delta \eta}, \quad \eta_t = \frac{\delta H}{\delta \psi}, \quad (2.5)$$

где роль канонических переменных играют функции  $\eta$  и  $\psi$ , последняя из которых определяется выражением

$$\psi(x, y, t) = \rho_1 \Phi_1|_{z=\eta} - \rho_2 \Phi_2|_{z=\eta}.$$

Гамильтониан, совпадающий с полной энергией системы, имеет вид:

$$\begin{aligned} H = & \rho_1 \int_{z \leq \eta} \frac{(\nabla \Phi_1)^2}{2} d^3r + \rho_2 \int_{z \geq \eta} \frac{(\nabla \Phi_2)^2}{2} d^3r \\ & - \varepsilon_0 \varepsilon_1 \int_{z \leq \eta} \frac{(\nabla \varphi_1)^2 - E_1^2}{2} d^3r - \varepsilon_0 \varepsilon_2 \int_{z \geq \eta} \frac{(\nabla \varphi_2)^2 - E_2^2}{2} d^3r. \end{aligned} \quad (2.6)$$

В совокупности, приведенные соотношения представляют собой замкнутую систему уравнений, описывающих движение диэлектрических жидкостей с поверхностью раздела под действием электростатических сил, обусловленных наличием внешнего вертикального электрического поля.

При анализе динамики поверхности раздела магнитных жидкостей в вертикальном магнитном поле следует в уравнениях заменить напряженности электрического поля  $E_{1,2}$  на напряженности магнитного поля  $H_{1,2}$ , относительные диэлектрические проницаемости  $\varepsilon_{1,2}$  на магнитные проницаемости  $\mu_{1,2}$ , а также электрическую постоянную  $\varepsilon_0$  на магнитную постоянную  $\mu_0$ .

## 2.3 Слабо-нелинейный анализ

Рассмотрим динамику поверхности раздела в приближении малости углов наклона границы,

$$|\nabla_{\perp}\eta| \sim \alpha \ll 1.$$

Для нахождения уравнений движения поверхности раздела выразим гамильтониан системы (2.6) через канонические переменные  $\eta$  и  $\psi$ . Для удобства дальнейшего анализа перейдем к безразмерным переменным:

$$\begin{aligned} \Phi_{1,2} &\rightarrow \Phi_{1,2} \frac{E_1}{k} \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1}{\rho_1}}, & \varphi_{1,2} &\rightarrow \varphi_{1,2} \frac{E_1}{k}, \\ \psi &\rightarrow \psi \frac{E_1}{k} \sqrt{\varepsilon_0 \varepsilon_1 \rho_1}, & \eta &\rightarrow \frac{\eta}{k}, & t &\rightarrow \frac{t}{E_1 k} \sqrt{\frac{\rho_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_1}}, & \mathbf{r} &\rightarrow \frac{\mathbf{r}}{k}, \end{aligned}$$

где  $k$  — характерное волновое число.

Применяя первую теорему Грина, гамильтониан (2.6) можно представить в виде интеграла по поверхности раздела:

$$H = \frac{1}{2} \int_s [\Phi_1 \partial_n \Phi_1 - (\rho_2/\rho_1) \Phi_2 \partial_n \Phi_2 - \tilde{\varphi}_1 \partial_n \tilde{\varphi}_1 + (\varepsilon_2/\varepsilon_1) \tilde{\varphi}_2 \partial_n \tilde{\varphi}_2]_s ds, \quad (2.7)$$

где  $ds$  — дифференциал поверхности,

$$ds = \sqrt{1 + (\nabla_{\perp}\eta)^2} dx dy,$$

а также мы ввели возмущения безразмерных потенциалов электрического поля

$$\tilde{\varphi}_1 = \varphi_1 + z, \quad \tilde{\varphi}_2 = \varphi_2 + (\varepsilon_1/\varepsilon_2)z.$$

Отметим, что граничные условия (2.4) для возмущенных потенциалов электрического поля принимают вид

$$\tilde{\varphi}_1 = \tilde{\varphi}_2 + (1 - \varepsilon_1/\varepsilon_2)\eta, \quad \partial_n \tilde{\varphi}_1 = \partial_n \tilde{\varphi}_2, \quad z = \eta(x, y, t). \quad (2.8)$$

Разложим подынтегральное выражение в гамильтониане (2.7) в ряд по степеням  $\eta$  и  $\psi$ .

Для этого необходимо выразить входящие в (2.7) функции через канонические переменные. Воспользуемся тем, что для гармонических функций, затухающих при  $z \rightarrow \mp\infty$ , справедливо:

$$\phi_{1,2}|_{z=\eta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pm\eta)^n \hat{k}^n}{n!} \phi_{1,2}|_{z=0}, \quad \partial_z \phi_{1,2}|_{z=0} = \pm \hat{k} \phi_{1,2}|_{z=0},$$

где  $\hat{k}$  — двумерный интегральный оператор с ядром, фурье-образ которого равен модулю волнового вектора, т.е.

$$\hat{k} e^{ik_x x + ik_y y} = \sqrt{k_x^2 + k_y^2} \cdot e^{ik_x x + ik_y y},$$

где  $k_x$  и  $k_y$  — соответствующие проекции волнового вектора. Используя эти соотношения для потенциалов  $\tilde{\varphi}_{1,2}$ ,  $\Phi_{1,2}$  и их производных, можно найти необходимые зависимости из граничных условий (2.3) и (2.8). В частности, для потенциалов  $\tilde{\varphi}_{1,2}$  и  $\Phi_{1,2}$  на поверхности раздела получим:

$$\tilde{\varphi}_{1,2}|_{z=\eta} = \pm \frac{A_E(1 \mp A_E)}{1 - A_E} \eta - A_E(1 - A_E) \hat{k}^{-1} \left[ \hat{k}(\eta \hat{k} \eta) + \nabla_{\perp}(\eta \nabla_{\perp} \eta) \right] + O(\alpha^3), \quad (2.9)$$

$$\Phi_{1,2}|_{z=\eta} = \pm \frac{(1+A)}{2} \psi + \frac{(1+A)(1 \mp A)}{2} \hat{k}^{-1} \left[ \hat{k}(\eta \hat{k} \psi) + \nabla_{\perp}(\eta \nabla_{\perp} \psi) \right] + O(\alpha^3), \quad (2.10)$$

где  $A = (\rho_1 - \rho_2)/(\rho_1 + \rho_2)$  - число Атвуда ( $0 < A < 1$ ), а  $A_E = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$  - его аналог для диэлектрических проницаемостей. При выводе соотношений (2.9) и (2.10), мы ограничились учетом квадратичных нелинейностей.

Подставляя (2.9) и (2.10), а также разложения для нормальных производных потенциалов в (2.7), получаем после несложных преобразований гамильтониан системы с точностью до кубических слагаемых в подынтегральном выражении:

$$H = \frac{1+A}{4} \int \left( \psi \hat{k} \psi - A \eta \left( (\hat{k} \psi)^2 - (\nabla_{\perp} \psi)^2 \right) \right) dx dy \\ - \frac{A_E^2}{1 - A_E} \int \left( \eta \hat{k} \eta + A_E \eta \left( (\hat{k} \eta)^2 - (\nabla_{\perp} \eta)^2 \right) \right) dx dy.$$

Взяв соответствующие вариационные производные, получим из (2.5) искомые уравнения движения:

$$\psi_t - \frac{2A_E^2}{1 - A_E} \hat{k} \eta = \frac{A(1+A)}{4} \left( (\hat{k} \psi)^2 - (\nabla_{\perp} \psi)^2 \right) \\ + \frac{A_E^3}{1 - A_E} \left( (\hat{k} \eta)^2 - (\nabla_{\perp} \eta)^2 \right) + \frac{2A_E^3}{1 - A_E} \left( \hat{k}(\eta \hat{k} \eta) + \nabla_{\perp}(\eta \nabla_{\perp} \eta) \right) + O(\alpha^3), \quad (2.11)$$

$$\eta_t - \frac{1+A}{2} \hat{k}\psi = -\frac{A(1+A)}{2} \left( \hat{k}(\eta \hat{k}\psi) + \nabla_{\perp}(\eta \nabla_{\perp}\psi) \right) + O(\alpha^3). \quad (2.12)$$

Следует отметить, что при  $A_E = 0$ , т.е. в ситуации, когда  $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$  и поляризационных зарядов на границе раздела нет, уравнения с точностью до коэффициентов, устраняемых масштабными преобразованиями, совпадают с системой, описывающей инерциальное движение свободной поверхности идеальной жидкости в невесомости [88]. Ее особенностью является то, что первое уравнение системы не содержит функции  $\eta$  и для плоской симметрии задачи может быть сведено к интегрируемому уравнению Хопфа. Второе уравнение системы линейно по  $\eta$  и, как следствие, также может быть решено аналитически. В соответствии с решениями, на границе имеется тенденция к формированию слабых корневых особенностей, для которых кривизна поверхности становится бесконечной, а сама поверхность остается гладкой. Как следует из уравнений (2.11) и (2.12) при  $A_E = 0$ , аналогичные процессы могут происходить и на поверхности раздела двух жидкостей.

Удобно ввести вспомогательные функции

$$f = (c\psi + \eta)/2, \quad g = (c\psi - \eta)/2,$$

где  $c$  – постоянная, равная

$$c = \frac{\sqrt{(1-A_E)(1+A)}}{2|A_E|}.$$

В результате замены, линеаризованные уравнения движения расщепляются на независимые уравнения для функций  $f$  и  $g$ :

$$\tau f_t = \hat{k}f, \quad \tau g_t = -\hat{k}g,$$

где  $\tau$  – характерное время развития неустойчивости, определяемое выражением

$$\tau = \frac{1}{|A_E|} \sqrt{\frac{1-A_E}{1+A}}.$$

Линейное уравнение на  $f$  описывает экспоненциальный рост исходного периодического возмущения границы, а уравнение на  $g$  – его релаксацию к нулю. Другими словами, после линеаризации система уравнений (2.11) и (2.12) расщепилась на две подсистемы, соответствующие нарастающей и затухающей ветвям решений. Понятно, что при анализе динамики развития

неустойчивости поверхности раздела достаточно рассматривать лишь нарастающую ветвь (для затухающей ветви можно положить функцию  $g$  тождественно равной нулю), что существенно упрощает анализ. Аналогичным образом вычленение нарастающей ветви решений можно осуществить и для нелинейных уравнений движения. Для этого нужно учесть, что для нарастающей ветви будет  $g = O(\alpha^2)$ . Это означает, что в правых (нелинейных) частях уравнений (2.11) и (2.12) можно положить  $g = 0$ . В итоге уравнения, описывающие начальные стадии развития неустойчивости, примут вид:

$$\tau f_t - \hat{k}f = \frac{A + A_E}{4} [(\hat{k}f)^2 - (\nabla_{\perp} f)^2] - \frac{A - A_E}{2} [\hat{k}(f\hat{k}f) + \nabla_{\perp}(f\nabla_{\perp}f)] + O(\alpha^3), \quad (2.13)$$

$$\tau g_t + \hat{k}g = \frac{A + A_E}{4} [(\hat{k}f)^2 - (\nabla_{\perp} f)^2 + \hat{k}(f\hat{k}f) + \nabla_{\perp}(f\nabla_{\perp}f)] + O(\alpha^3). \quad (2.14)$$

Таким образом, рассмотрение слабо-нелинейной стадии развития неустойчивости поверхности раздела диэлектрических жидкостей в сильном вертикальном электрическом поле сводится к анализу системы интегро-дифференциальных уравнений (2.13) и (2.14). Важно, что нелинейное уравнение (2.13) содержит лишь функцию  $f$ , а уравнение (2.14) является линейным по функции  $g$ . Это значительно упрощает анализ динамики границы раздела по сравнению с более общей системой (2.11) и (2.12), описывающей как рост возмущений границы, так и их релаксацию. Следует отметить, что исходная система уравнений (2.11) и (2.12) была инвариантной по отношению к обращению времени, соответствующему заменам  $t \rightarrow -t$  и  $\psi \rightarrow -\psi$ . Система (2.13) и (2.14), описывающая только нарастающие со временем решения, не обладает подобным свойством.

## 2.4 Предварительный анализ

В предыдущем разделе мы показали, что исследование слабо-нелинейной стадии развития электрогидродинамической неустойчивости поверхности раздела двух диэлектрических жидкостей в сильном электрическом поле сводится к анализу системы нелинейных интегро-дифференциальных уравнений (2.13) и (2.14).

Рассмотрим возмущения поверхности, имеющие плоскую симметрию (все величины не зависят от переменной  $y$ ). В этом случае оператор  $\hat{k}$  может быть выражен через преобразо-

вание Гильберта  $\hat{H}$ :

$$\hat{k} = -\hat{H} \frac{\partial}{\partial x}, \quad \hat{H}\phi(x) = \frac{1}{\pi} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\phi(x')}{x-x'} dx'.$$

В двумерном (плоско-симметричном) случае уравнения (2.13) и (2.14) примут вид

$$\tau f_t + \hat{H} f_x = \frac{A + A_E}{4} [(\hat{H} f_x)^2 - (f_x)^2] - \frac{A - A_E}{2} [\hat{H} (f \hat{H} f_x)_x + (f f_x)_x], \quad (2.15)$$

$$\tau g_t - \hat{H} g_x = \frac{A + A_E}{4} [(\hat{H} f_x)^2 - (f_x)^2 + 2\hat{H} (f \hat{H} f_x)_x + 2(f f_x)_x]. \quad (2.16)$$

Далее удобно ввести функции аналитические в верхней полуплоскости комплексной переменной  $x$ :

$$F = \hat{P}f, \quad G = \hat{P}g,$$

здесь  $\hat{P} = (1 - i\hat{H})/2$  — проекционный оператор. Так как действие оператора Гильберта на аналитическую функцию в верхней полуплоскости функцию тождественно ее умножению на мнимую единицу, уравнения (2.15) и (2.16) могут быть переписаны в виде

$$\tau F_t + iF_x = -(A + A_E)F_x^2/2 - (A - A_E)\hat{P}(F\bar{F}_x)_x, \quad (2.17)$$

$$\tau G_t - iG_x = -(A + A_E)\left[F_x^2/2 - \hat{P}(F\bar{F}_x)_x\right]. \quad (2.18)$$

Решение уравнения (2.18) с начальным условием  $G|_{t=0} = 0$  определяется следующим образом

$$G = \frac{1}{\tau} \int_0^t K(x + it/\tau - i\tilde{t}/\tau, \tilde{t}) d\tilde{t}, \quad K(x, t) = -(A + A_E)\left[F_x^2/2 - \hat{P}(F\bar{F}_x)_x\right]. \quad (2.19)$$

В правой части ключевого уравнения (2.17) выделено два комплекса нелинейных слагаемых. В общем случае, когда все слагаемые отличны от нуля, построить точное аналитическое решение этого уравнения не удастся. Тем не менее, как легко заметить, существуют два частных случая:

$$A_E = A + O(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad \rho_1/\rho_2 = \varepsilon_1/\varepsilon_2 + O(\alpha), \quad (2.20)$$

$$A_E = -A + O(\alpha) \quad \Leftrightarrow \quad \rho_1/\rho_2 = \varepsilon_2/\varepsilon_1 + O(\alpha), \quad (2.21)$$

когда второй, либо, соответственно, первый комплекс нелинейных слагаемых в (2.17) обращается в нуль, и уравнения эволюции поверхности раздела существенно упрощаются. Оказывается, что в обоих случаях решения уравнений (2.17) и (2.18) можно построить аналитически. Эти ситуации будут поочередно рассмотрены в двух последующих разделах работы. Для общего случая, когда нет условий на  $A$  и  $A_E$  возможно построить приближенное решение задачи.

Обсудим теперь реализуемость условий (2.20) и (2.21). Данным условиям с приемлемой точностью могут удовлетворять границы раздела между несмешиваемыми органическими и минеральными маслами, а также полимерными суспензиями. Эксперименты с такими жидкостями проводились, например, в работе [89]. В Таблице 2.1 представлены характеристики таких жидкостей, а в Таблице 2.2 они объединены в пары, для которых значения параметров  $A$  и  $A_E$  по абсолютному значению близки и, следовательно, условия (2.20) и (2.21) выполняются. Характерные значения напряженности электрического поля внутри нижней жидкости, соответствующие условию сильного электрического поля (2.1). Здесь ПФМС — кремнийорганический полимер полиметилфенилсилоксан, ММ — минеральное масло, ХМ — хлопковое масло, ЛМ — льняное масло, ТМ — трансформаторное масло. Следует также отметить, что условие (2.20) естественным образом реализуется для поверхности раздела диэлектрической жидкости со значительной проницаемостью ( $\varepsilon_1 \gg 1$ ) и легкой газовой средой, имеющую близкую к единице диэлектрическую проницаемость ( $\varepsilon_2 \approx 1$ ). В этом случае будет  $A \approx A_E \approx 1$ .

	Жидкий диэлектрик	$\varepsilon$	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>
1	дистиллированная вода	81	1000
2	жидкий гелий	1,05	125
3	полиметилфенилсилоксан (ПФМС)	2,7	1100
4	минеральное масло (ММ)	2,2	880
5	льняное масло (ЛМ)	3,2	930
6	трансформаторное масло (ТМ)	3,2	970
7	фреон (R-11)	2,0	570

Таблица 2.1: Примеры жидких диэлектриков

При анализе динамики развития неустойчивости границы раздела ферромагнитных жидкостей в магнитном поле, в условиях (2.20) и (2.21) необходимо поменять диэлектри-

Нижняя жидкость	Верхняя жидкость	$A_E$	$A$	$E_1$ , кВ/см
вода	газовая среда	0,98	1,00	2.2
ПФМС	ММ	0,11	0,10	16.3
ЛМ	Фреон	0,23	0,24	17.0
Нижняя жидкость	Верхняя жидкость	$A_E$	$A$	$E_1$ , кВ/см
гелий	вакуум	-1,00	1,00	1.0
ПФМС	ЛМ	-0,08	0,08	20.2
ПФМС	ТМ	-0,08	0,06	18.8

Таблица 2.2: Пары жидких диэлектриков, удовлетворяющих условиям (2.20) и (2.21)

ческие проницаемости жидкостей  $\varepsilon_{1,2}$  на магнитные проницаемости  $\mu_{1,2}$ . Как известно, ферромагнитные жидкости представляют собой коллоидные системы, состоящие из магнитных наночастиц, находящихся во взвешенном состоянии в несущих жидкостях. Как правило, относительная концентрация частиц составляет несколько процентов. При добавлении необходимого количества частиц условия (2.20) и (2.21) можно реализовать практически для любых типов материалов наночастиц (см. работы [90, 91]). Здесь мы не будем приводить конкретные характеристики таких жидкостей; с ними можно ознакомиться, к примеру, в обзоре [92], посвященном изучению ферромагнитных жидкостей, а также по статьям [93, 94].

Обсудим теперь условия применимости уравнений (2.17) и (2.18). Напомним, что данные уравнения были получены в рамках мало-углового приближения, которое соответствует неравенству  $|\operatorname{Re} F_x| \sim \alpha \ll 1$ . Очевидно, что характерные углы наклона поверхности возрастают в результате развития неустойчивости и, следовательно, мы должны считать  $\alpha$  функцией времени. Найдем условия, при которых  $\alpha(t)$  будет мала на протяжении всей эволюции системы, начиная с начального момента времени ( $t = 0$ ) и заканчивая моментом формирования особенности ( $t = t_c$ ).

Рассмотрим начальное возмущение вида

$$\eta(x, 0) = Sa_0/(x^2 + a_0^2), \quad (2.22)$$

где  $S$  — постоянная, соответствующая направлению возрастания возмущения ( $S$  пропорциональна площади, охватываемой возмущением,  $S = \pi^{-1} \int \eta dx$ ) и  $a_0$  — ширина возмущения. Согласно данному выражению в начальный момент времени  $t = 0$ , начальные углы наклона определяются как  $\alpha(0) \approx |S|/a_0^2$ . Ясно, что малоугловое приближение применимо для



очень малых значений параметра  $S$ , т.е. для  $|S| \ll 1$ . В терминах функций  $F$  и  $G$ , начальное условие (2.22) запишется как

$$F(x, 0) = \frac{iS/2}{x + ia_0}, \quad G(x, 0) = 0, \quad (2.23)$$

т.е. функция  $F$  имеет особенность (простой полюс) в точке  $x = -ia_0$ .

В линейном приближении решение уравнений (2.17) и (2.18) с начальным условием (2.23) имеет следующий вид:

$$F(x, t) = \frac{iS/2}{x + ia_0 - it/\tau}, \quad G(x, t) = 0,$$

т.е. полюс движется с постоянной скоростью в направлении действительной числовой оси, достигая точки  $x = 0$  в момент времени  $t = t_0 \equiv a_0\tau$ . В этот момент функция перестает быть аналитической, и профиль поверхности становится сингулярным. Характерные углы наклона возрастают согласно соотношению

$$\alpha(t) \approx |S|/(a_0 - t/\tau)^2. \quad (2.24)$$

Далее будет продемонстрировано, что вклад нелинейных слагаемых в (2.17) и (2.18) имеет определяющее значение на тип формирующейся особенности. Так, в частности, слабые корневые особенности могут возникать на границе раздела жидкостей. Для них углы наклона поверхности остаются малыми в окрестности сингулярности. Такое поведение принципиально отличается от линейной модели, согласно которой (2.24),  $\alpha \rightarrow \infty$  по мере того как,  $t \rightarrow t_0$ . Для нелинейных уравнений момент формирования особенности ( $t_c$ ) отличается от линейной оценки ( $t_0$ ) на некоторую величину  $\Delta \equiv t_0 - t_c$ . Вне окрестности особой точки динамика поверхности может быть описана линейными уравнениями и, следовательно, формула (2.24) является применимой. Согласно ей углы наклона на периферии в момент времени  $t = t_c$  задаются как

$$\alpha(t_c) \approx |S|\tau^2/\Delta^2. \quad (2.25)$$

Таким образом, малоугловое приближение применимо для момента формирования особенности, только если выполняется условие  $\Delta = o(|S|^{1/2})$ . В разд. 2.7 мы покажем, что данное

требование действительно выполняется в общем случае.

## 2.5 Динамика поверхности раздела для $A_E = A$

В настоящем разделе мы рассмотрим динамику поверхности раздела двух диэлектрических жидкостей в вертикальном электрическом поле в ситуации, когда отношение плотностей жидкостей равно отношению их диэлектрических проницаемостей, т.е.  $A_E = A$ . В частности, это условие означает, что  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ . Система уравнений (2.13) и (2.14) примет вид:

$$\tau f_t + \hat{H} f_x = \frac{A}{2} \left[ (\hat{H} f_x)^2 - (f_x)^2 \right], \quad (2.26)$$

$$\tau g_t - \hat{H} g_x = \frac{A}{2} \left[ (\hat{H} f_x)^2 - (f_x)^2 + 2\hat{H} \left( f \hat{H} f_x \right)_x + 2(f f_x)_x \right]. \quad (2.27)$$

Эти уравнения с точностью до масштабных преобразований совпадают с уравнениями, полученными в [60, 61] для описания нелинейной динамики свободной поверхности идеальной проводящей жидкости в сильном вертикальном электрическом поле. Близкие по структуре уравнения также рассматривались в работах [25, 88] применительно к описанию динамики свободной поверхности идеальной жидкости при отсутствии внешних сил. Поскольку методика анализа уравнений вида (2.26) и (2.27) подробно описана в указанных работах, ниже мы лишь кратко приведем основные соотношения и опишем наиболее важные свойства решений.

Для анализа (2.26) и (2.27) удобно ввести аналитические в верхней полуплоскости комплексного переменного  $x$  функции

$$F = \hat{P} f, \quad G = \hat{P} g,$$

где  $\hat{P} = (1 - i\hat{H})/2$  — проекционный оператор. С учетом того, что действие оператора Гильберта на аналитическую в верхней полуплоскости функцию сводится к ее домножению на мнимую единицу, уравнения (2.26) и (2.27) перепишутся как

$$\tau F_t + iF_x = -AF_x^2, \quad (2.28)$$

$$\tau G_t - iG_x = -AF_x^2 + 2A\hat{P} \left( F \bar{F}_x \right)_x. \quad (2.29)$$

Важно, что в результате этого преобразования интегро-дифференциальное уравнение (2.26) сводится к значительно более простому уравнению в частных производных (2.28). Это уравнение заменой  $V = F_x$  приводится к комплексному уравнению Хопфа,

$$\tau V_t + iV_x = -2AVV_x,$$

интегрируемое методом характеристик. Его решение в неявном виде записывается как

$$V = V_0(x'), \quad x\tau = x'\tau + it + 2AV_0(x')t, \quad (2.30)$$

где  $V_0(x) = V|_{t=0}$ , а  $x'$  играет роль параметра. Выражения (2.30) описывают движение особенностей (точек ветвления) в комплексной плоскости  $x$ . Особенность на границе раздела жидкостей возникает в некоторый момент времени  $t = t_c$ , когда одна из точек ветвления выходит на действительную ось.

Решением уравнения (2.18), удовлетворяющему начальному условию  $G|_{t=0} = 0$ , является:

$$G = \frac{1}{\tau} \int_0^t Q(x + it/\tau - it'/\tau, t') dt', \quad Q(x, t) = -AF_x^2 + 2A\hat{P}(F\bar{F}_x)_x. \quad (2.31)$$

Отметим, что для анализа формирования особенностей важным является то, что старшая производная в правой части уравнения (2.18) относится к функции  $\bar{F}$ , аналитической в нижней полуплоскости комплексной переменной  $x$ . Ее влияние подавляется действием проекционного оператора  $\hat{P}$ . В противном случае вблизи формирующейся особенности было бы нарушено условие малости  $g$  по сравнению с  $f$ , использованное при выводе системы (2.13) и (2.14).

Форма поверхности задается формулой  $\eta = 2\operatorname{Re}(F - G)$ . В соответствии с решениями (2.30) и (2.31), в случае общего положения, для симметричного относительно точки  $x = x_c$  возмущения форма поверхности вблизи особенности определяется выражением

$$z - z_c \sim -|x - x_c|^{3/2},$$

где  $z_c = \eta(x_c, t_c)$ . Важной особенностью подобных решений является то, что они не нарушают

условия применимости малоуглового приближения; вблизи особенности справедливо:

$$\eta_x \sim -(x - x_c) \cdot |x - x_c|^{-1/2}.$$

Бесконечной в момент  $t = t_c$  становится лишь вторая производная функции  $\eta$ , т.е., фактически, кривизна поверхности:

$$\eta_{xx}(x, t_c) \sim -|x - x_c|^{-1/2}, \quad \eta_{xx}(x_c, t) \sim -(t_c - t)^{-1/2}.$$

Представленные зависимости показаны на Рисунке 2.2. Можно предположить, что корневые особенности являются зародышами конусов Тейлора, фотоснимки которого приведены Рисунке 1.3 слева.

Таким образом, при выполнении условия (2.20) на слабо-нелинейной стадии развития электрогидродинамической неустойчивости поверхности раздела жидких диэлектриков на границе формируются особенности корневого типа, для которых поверхность остается гладкой, а в бесконечность обращается ее кривизна. Следует отметить, что подобное поведение демонстрируют жидкости при тангенциальном разрыве скоростей [95] и свободные поверхности проводящих жидкостей в сильном внешнем электрическом поле. Действительно, в предельном случае, когда  $A = A_E = 1$  (имеется только нижняя жидкость, причем электрическое поле в нее не проникает), задачи становятся эквивалентными с математической точки зрения. Отметим, что для этого предела использованные в разделе 2.3 для перехода к безразмерным обозначениям замены перестают быть корректными.

## 2.6 Динамика поверхности раздела для $A_E = -A$

Рассмотрим в рамках системы интегро-дифференциальных уравнений (2.13) и (2.14) динамику развития электрогидродинамической неустойчивости границы раздела диэлектрических жидкостей для случая когда отношение плотностей жидкостей которых равно обратному отношению их диэлектрических проницаемостей, то есть  $A_E = -A$ . При выполнении условия (2.21) система уравнений (2.13) и (2.14) расщепляется на два независимых уравнения: первое уравнение не содержит функцию  $g$ , а второе – функцию  $f$ .

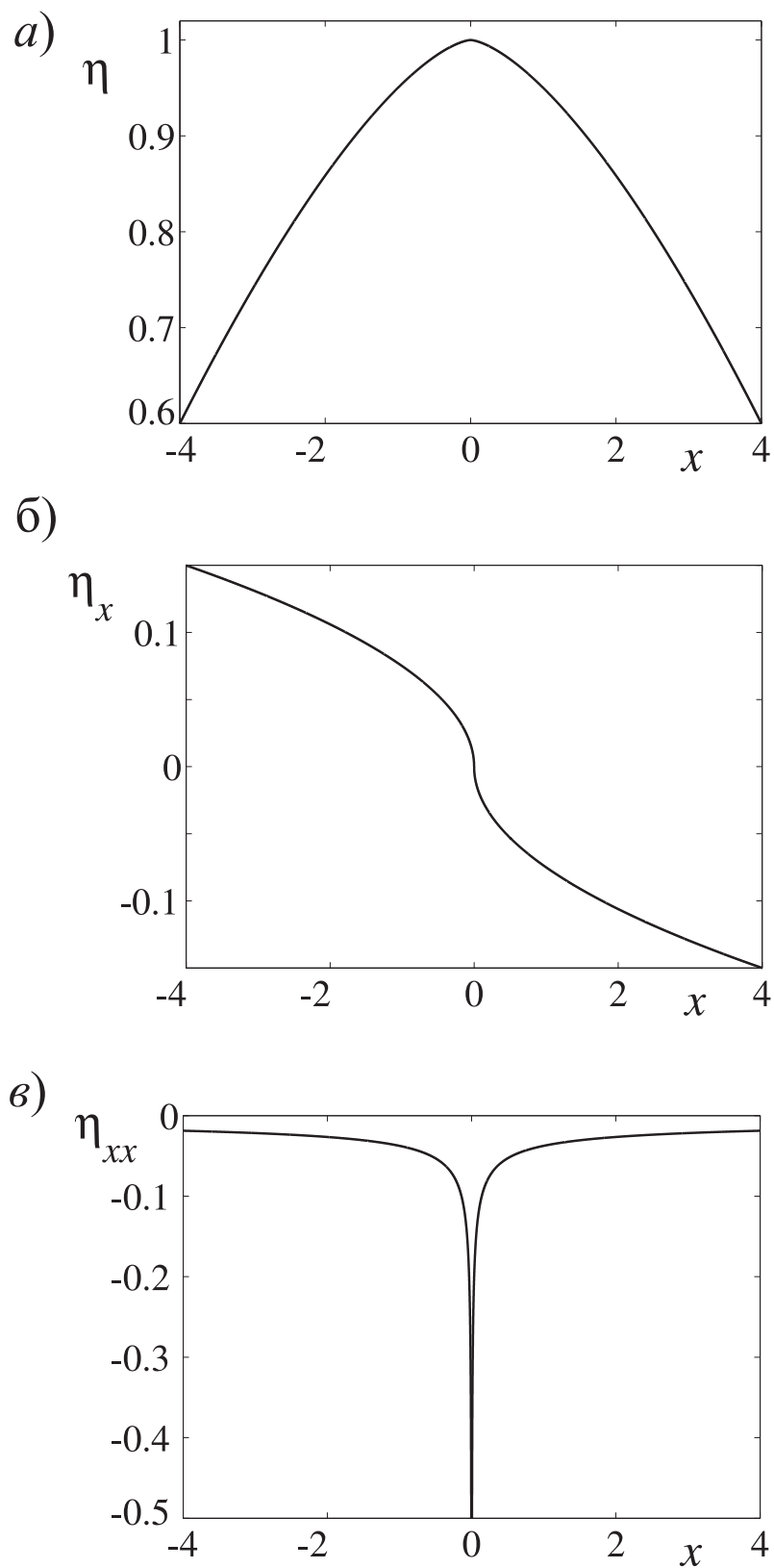


Рисунок 2.2: Качественно показана граница жидкости вблизи особенности (а), крутизна (б) и кривизна (в) поверхности. Видно, что амплитуда и углы наклона поверхности вблизи особой точки остаются конечными, а в бесконечность обращается ее кривизна.

Примечательно, что в уравнении (2.14) правая (квадратично нелинейная) часть тождественно обращается в нуль. При этом оно принимает простой вид:

$$\tau g_t + \hat{k}g = O(\alpha^3). \quad (2.32)$$

Тогда функция  $g$  будет релаксировать к нулю за время порядка  $\tau$  и, как следствие, можно считать  $g = O(\alpha^3)$ . В терминах канонических переменных  $\eta$  и  $\psi$  это означает, что с точностью до кубических нелинейностей

$$\eta = \frac{(1+A)}{2A} \psi, \quad (2.33)$$

где мы выразили параметр  $c$  через число Атвуда. Как следствие,  $f = \eta + O(\alpha^3)$ , что позволяет переписать ключевое уравнение (2.13) непосредственно через задающую форму границы функцию  $\eta$ . Оно примет следующий вид:

$$\eta_t - A\hat{k}\eta = A^2 \left[ \hat{k}(\eta\hat{k}\eta) + \nabla_{\perp}(\eta\nabla_{\perp}\eta) \right] + O(\alpha^3), \quad (2.34)$$

где мы учли, что для рассматриваемого случая  $\tau = A^{-1}$ .

Интересно, что связь (2.33) между каноническими переменными возникает при рассмотрении решений с нарастающей амплитудой не только в рамках малоуглового приближения, но и для исходных уравнений движения. То есть это соотношение может быть совместным с уравнениями движения при произвольной амплитуде возмущений границы. Действительно, в работах [70, 96] было установлено, что при выполнении условия  $\varepsilon_1\rho_1 = \varepsilon_2\rho_2$  возможна реализация особого режима движения жидкостей, для которого безразмерные потенциалы поля и скорости связаны линейными соотношениями

$$\varphi_1 = \Phi_1 - z, \quad \varphi_2 = \frac{1-A}{1+A} (\Phi_2 - z). \quad (2.35)$$

Эти выражения означают существование системы координат, в которой жидкости двигаются вдоль силовых линий электрического поля, причем скорость движения пропорциональна напряженности поля.

Подставляя (2.35) в условие непрерывности потенциала электрического поля на границе (2.4), придем после несложных преобразований к соотношению (2.33). Таким образом, для нарастающей ветви решений соотношение (2.33) является точным. Из уравнения (2.32) следует,

что, по крайней мере, на начальных (слабо-нелинейных) стадиях развития неустойчивости система асимптотически стремится к состоянию, когда соотношение (2.33) выполняется. Это свидетельствует в пользу устойчивости режима движения, соответствующего выражениям (2.35).

Рассмотрим уравнение (2.34). В случае плоской симметрии задачи оно примет вид

$$\eta_t + A\hat{H}\eta_x = A^2 \left[ \hat{H} \left( \eta \hat{H} \eta_x \right)_x + (\eta \eta_x)_x \right], \quad (2.36)$$

Аналогично тому, как это было сделано в предыдущем разделе, введем аналитическую в верхней полуплоскости комплексной переменной  $x$  функцию  $F = \hat{P}\eta$ . С ее использованием уравнение (2.36) переписывается как

$$F_t + iAF_x = 2A^2\hat{P} (F\bar{F}_x)_x. \quad (2.37)$$

Особенностью уравнения (2.37) является то, что в ряде ситуаций оно допускает редукцию к обыкновенным дифференциальным уравнениям (ОДУ), что в свою очередь позволяет построить его частные точные решения. Так, рассмотрим эволюцию локализованного возмущения поверхности раздела, задаваемого выражением

$$\eta(x, t) = \frac{Sa(t)}{x^2 + a^2(t)}.$$

Этому представлению соответствует

$$F(x, t) = \frac{iS/2}{x + ia(t)}, \quad (2.38)$$

$a(t)$  — положительно определенная функция времени, определяющая положение полюса на мнимой оси. После подстановки выражения (2.38) в уравнение (2.37) и интегрирования полученного ОДУ на временную динамику  $a(t)$ , находим в неявном виде:

$$a(t) + \frac{\sqrt{AS}}{4} \ln \left( \frac{2a(t) - \sqrt{AS}}{2a(t) + \sqrt{AS}} \right) = A(t_0 - t), \quad S > 0, \quad (2.39)$$

$$a(t) + \frac{\sqrt{A|S|}}{2} \arctan \left( \frac{2a(t)}{\sqrt{A|S|}} \right) = A(t_c - t), \quad S < 0, \quad (2.40)$$

где  $t_0$  и  $t_c$  — постоянные интегрирования.

Как видно, характер эволюции поверхности в значительной степени определяется знаком параметра  $S$ . При значительном удалении полюса от действительной оси, т.е. при больших значениях функции  $a(t)$ , вторые слагаемые в левых частях формул (2.39) и (2.40) малы по сравнению с первыми, и полюс движется с постоянной скоростью по мнимой оси к началу координат. При приближении полюса к действительной оси существенную роль начинают играть нелинейные слагаемые. При положительном  $S$  (возмущение направлено вверх) движение полюса замедляется; функция  $a(t)$  асимптотически стремится к значению  $a = \sqrt{AS}/2$ .

При отрицательном  $S$  (возмущение направлено вниз) функция  $a(t)$  обращается в нуль в момент времени  $t = t_c$ , т.е. полюс выходит на действительную ось. В этот момент нарушается условие аналитичности функции  $F$ , а сам профиль поверхности становится сингулярным:

$$\eta(x, t_c) = \lim_{a \rightarrow 0} \left( \frac{Sa}{x^2 + a^2} \right) = \pi^{-1} S \delta(x),$$

где  $\delta(x)$  — дельта-функция Дирака. Таким образом, особенность возникает в задающей профиль поверхности функции  $\eta$ . Это принципиально отличает настоящий случай от рассмотренного в предыдущем разделе: там в бесконечность обращалась только кривизна поверхности, то есть вторая производная функции  $\eta$ .

Решения (2.38)–(2.40) можно обобщить на ситуацию, когда на поверхности раздела имеется  $N$  локализованных возмущений,

$$F(x, t) = \sum_{n=1}^N \frac{iS_n/2}{x + p_n(t)}, \quad n = 1, 2, \dots, N,$$

где  $S_n$  — постоянные,  $p_n(t)$  — комплексные функции, задающие положения полюсов в нижней комплексной полуплоскости (т.е.  $\text{Im } p_n(t) > 0$ ). Как оказывается, при использовании данного представления для функции  $F$ , уравнение (2.37) сводится к следующей системе ОДУ:

$$\frac{dp_n}{dt} = -iA + iA^2 \sum_{j=1}^N \frac{S_j}{(p_n - \bar{p}_j)^2}, \quad n = 1, 2, \dots, N.$$

Редукции уравнения (2.37) к системе конечного числа ОДУ возможны и при рассмотрении периодических возмущений поверхности раздела — см. ссылку [97].

Итак, анализ уравнения движения границы раздела (2.36) показал, что для возмуще-



ний, направленных от тяжелой жидкости к легкой ( $S > 0$  в терминах частного решения (2.38)), нелинейность сдерживает развитие линейной неустойчивости. Для направленных в противоположную сторону деформаций поверхности ( $S < 0$ ), напротив, нелинейность ускоряет развитие неустойчивости, приводя к формированию и заострению за конечное время лунок в поверхности раздела.

Понятно, что в обоих случаях применимость слабо-нелинейной модели (2.13) и (2.14), основанной на использовании малоуглового приближения, нарушается. Тем не менее, полученные решения свидетельствуют о тенденции к формированию за конечное время сильных особенностей, для которых углы наклона растут до значений в  $\pi/2$ . Именно такое поведение, как было показано в [62, 63], демонстрирует поверхность идеальной диэлектрической жидкости с проводящей поверхностью (жидкий гелий с локализованными над поверхностью электронами) в ситуации, когда поверхностный заряд полностью экранирует поле вне жидкости. В рамках модели (2.13) и (2.14) рассмотрение этой задачи формально соответствует условиям  $A = 1$  и  $A_E = -1$ , при которых требование (2.21) автоматически выполняется. Для жидкого диэлектрика со свободным поверхностным зарядом исходные уравнения движения могут быть сведены к так называемому уравнению лапласовского роста (УЛР), допускающему редукцию к системе интегрируемых ОДУ [62, 63]. В соответствии с УЛР, на поверхности могут возникать особенности – точки заострения – для которых в момент формирования особенности  $t = t_c$  будет:

$$z - z_c \sim -|x - x_c|^{2/3}.$$

В следующей главе будет показано, что для границы раздела двух диэлектрических жидкостей, т.е. при  $A \neq 1$ , будет иметь место тенденция к формированию аналогичных сильных особенностей.

## 2.7 Формирование особенностей в общем случае

В предыдущих разделах мы рассмотрели два частных случая  $A_E = \pm A$ , для которых уравнения движения (2.13) и (2.14) могут быть решены аналитически. В данном разделе мы исследуем динамику формирования особенностей на границе жидкостей для произвольных

значений  $A_E$  и  $A$ , за исключением частного случая  $A_E = 0$ , когда электростатические силы отсутствуют. Будет продемонстрировано, что в общем случае возможно описать эволюцию локализованных возмущений поверхности, к примеру, для начальных условий (2.38).

Рассмотрим уравнение (2.17) в рамках "локального" приближения, суть которого состоит в рассмотрении малой окрестности особой точки, движущейся вдоль траектории  $x = X(t)$  в нижней комплексной полуплоскости  $x$ . Это позволяет упростить правую часть уравнения (2.17). Так как влияние особенностей функции  $\bar{F}_x$  (которые находятся в верхней полуплоскости) подавляются проекционным оператором  $\hat{P}$ , действующим на выражение  $F\bar{F}_x$ , необходимо сохранить только основной порядок в разложении производной  $\bar{F}_x$  вдоль  $x = X(t)$ . Таким образом, будет справедливо приближение

$$\hat{P}(F\bar{F}_x) \approx FR(t), \quad R(t) \equiv \bar{F}_x|_{x=X(t)}. \quad (2.41)$$

Данное выражение становится точным, если функция  $F$  имеет только один полюс; эта ситуация подобна рассмотренной в разд. 2.5.

В рамках приближения (2.41) уравнение движения границы (2.17) переписывается как

$$\tau F_t + iF_x = -(A + A_E) F_x^2/2 - (A - A_E) R(t)F_x, \quad (2.42)$$

т.е. мы получили нелинейное уравнение в частных производных первого порядка, вместо интегро-дифференциального уравнения. Как и в разд. 2.5 введем комплексную скорость  $V = F_x$ . В результате получим уравнение

$$\tau V_t + Q(t)V_x = -(A + A_E)VV_x,$$

где мы обозначили  $Q(t) \equiv i + (A - A_E)R(t)$ . Решение данного уравнения может быть построено при помощи метода характеристик:

$$V = V_0(\tilde{x}), \quad x\tau = \tilde{x}\tau + \int_0^t Q(t) dt + (A + A_E)V_0(\tilde{x})t, \quad (2.43)$$

где  $V_0(x) = V|_{t=0}$  и  $\tilde{x}$  — параметр. В целом, данные выражения немногим более сложны выражений, полученных для частного случая  $A_E = A$  (см. разд. 2.5). Появление дополнительного

квази-линейного слагаемого в уравнении (2.42) приводит к необходимости вычисления зависимости  $Q(t)$ .

Решение уравнения для  $G$  находится из формулы (2.31). Совместно пара функций  $F$  и  $G$  определяет профиль поверхности  $\eta = 2 \operatorname{Re}(F - G)$ . Так как функция  $G$  остается малой в сравнении с  $F$  вплоть до момента формирования особенности, мы можем приближенно считать  $\eta \approx 2 \operatorname{Re} F$ . Далее мы покажем, что для данного (общего) случая на поверхности раздела могут формироваться слабые особенности, при которых в бесконечность обращается кривизна поверхности  $\operatorname{Re} V_x \approx \eta_{xx} \rightarrow \infty$ .

Выражение (2.43) определяет решение уравнения (2.42) в неявном виде. Задача нахождения явного решения сводится к анализу отображения  $x \rightarrow \tilde{x}$ , определяемым (2.43). Данное отображение перестает быть взаимно однозначным в точках

$$\partial x / \partial \tilde{x} = 1 + (A + A_E) V_0'(\tilde{x}) t / \tau = 0. \quad (2.44)$$

Здесь  $V_0'$  обозначает производную по аргументу. Решение (2.44) определяет траекторию  $\tilde{x} = \tilde{X}(t)$  в комплексной  $\tilde{x}$ -плоскости. Движение точки ветвления функции  $V$  определяется выражением

$$X(t)\tau = \tilde{X}(t)\tau + \int_0^t Q(t) dt + (A + A_E) V_0(\tilde{X}(t)) t. \quad (2.45)$$

В терминах функции  $V$  временная эволюция  $Q(t)$  определяется уравнением

$$Q(t) = i + (A - A_E) \bar{V}'|_{x=X(t)}.$$

В момент времени  $t = t_c$ , когда точка ветвления касается действительной числовой оси, т.е.  $\operatorname{Im} X(t_c) = 0$  решение уравнения (2.42) становится сингулярным. Рассмотрим поведение решения вблизи особенности. Разлагая (2.43) в малой окрестности точки  $t = t_c$ ,  $x = x_c \equiv X(t_c)$ , и  $\tilde{x} = \tilde{x}_c \equiv \tilde{X}(t_c)$  и учитывая также (2.44) и (2.45), в основном порядке получаем:

$$V \approx V_0(\tilde{x}_c) + V_0'(\tilde{x}_c) \delta \tilde{x},$$

$$\tau \delta x \approx Q(t_c) \delta t + (A + A_E) V_0(\tilde{x}_c) \delta t + (A + A_E) V_0''(\tilde{x}_c) t_c (\delta \tilde{x})^2 / 2,$$

где  $\delta t = t - t_c$ ,  $\delta x = x - x_c$  и  $\delta \tilde{x} = \tilde{x} - \tilde{x}_c$ . Исключая параметр  $\delta \tilde{x}$  из данных выражений, в

близки особенности получим:

$$V \approx V_0(\tilde{x}_c) + V_0'(\tilde{x}_c) \left[ \frac{\tau \delta x - \delta t (Q(t_c) + (A + A_E)V_0(\tilde{x}_c))}{(A + A_E)V_0''(\tilde{x}_c) t_c/2} \right]^{1/2}. \quad (2.46)$$

Можно видеть, что производные  $V_x$  и  $V_t$  становятся бесконечными для  $\delta t \rightarrow 0$ , что соответствует формированию особенностей 3/2-порядка на границе раздела. За исключением особого случая  $A_E = -A$ , для которого разложение (2.46) теряет смысл. Данный случай рассмотрен в разд. 2.5.

Рассмотрим теперь поведение поверхности раздела при начальных условиях (2.23), которые в терминах функции  $V_0$  соответствуют выражению

$$V_0(\tilde{x}) = -\frac{iS/2}{(\tilde{x} + ia_0)^2}. \quad (2.47)$$

Пусть  $X(t_c) = 0$ , т.е. сингулярность возникает в точке  $x = 0$ . Подставляя выражение (2.47) в соотношения, описывающее движение особенности, мы можем найти  $t_c$  в основном порядке разложения по малому параметру  $S$ :

$$t_c \approx a_0\tau - 3\tau [Sa_0(A + A_E)]^{1/3}/2. \quad (2.48)$$

Здесь возникает дополнительное условие в виде неравенства  $S(A + A_E) \geq 0$ . Данное неравенство определяет необходимое условие формирования особенности в точке  $x = 0$ . Можно видеть, что при  $A_E > -A$  сингулярность в кривизне возникает только если  $S > 0$ , т.е. если возмущение направлено вверх. Случай  $A = A_E$  также попадает в данную категорию. Для  $A_E < -A$ , напротив, мы имеем  $S < 0$ , т.е. возмущение направлено вниз. В обоих случаях кривизна поверхности становится бесконечной за конечное время. Основное различие состоит в знаке кривизны. Кривизна отрицательна для  $A_E > -A$  и положительна для  $A_E < -A$ .

Из формулы (2.48) видно, что  $\Delta \sim |S|^{1/3}$  за исключением вырожденного случая  $A_E = -A$ . Из соотношения (2.25) следует, что для момента времени  $t = t_c$  малоугловое приближение применимо не только в окрестности сингулярной точки ( $\eta_x = 0$  в  $x = 0$ ), но и на периферии, то есть на удалении от сингулярности. Отметим, что последнее слагаемое в правой части уравнения (2.42) обеспечивает малые поправки порядка  $|S|^{2/3}$  для оценки  $t_c$ . Однако, в случае  $A_E = -A$  именно данные поправки определяют динамику формирования особен-

ностей. Учет этих слагаемых дает следующую оценку времени формирования особенности:  $\Delta \sim |S|^{1/2}$ , см. (2.40). Напомним, что для случая  $A_E = -A$  в разд. 2.6 было показано, что при  $S < 0$  существует тенденция к формированию сильных особенностей, для которых бесконечными становятся углы наклона поверхности.

В заключении данного раздела отметим, что результаты, полученные в рамках приближения (2.41) полностью согласуются с точными решениями, соответствующими случаю  $A_E = \pm A$ . Это свидетельствует в пользу адекватности предложенного модельного уравнения (2.42).

## 2.8 Выводы к Главе 2

В настоящей главе была рассмотрена задача о неустойчивости поверхности раздела жидких диэлектриков в сильном вертикальном электрическом поле. Проведенное теоретическое исследование привело к следующим новым результатам

1. В рамках канонического формализма получены интегро-дифференциальные уравнения, описывающие динамику границы с учетом квадратичных нелинейностей. Проведенный анализ позволил выявить два частных случая  $A = A_E$  и  $A = -A_E$ , для которых уравнения движения допускают точные решения. В общем случае, когда проницаемости и плотности произвольны построены приближенные решения, описывающие слабо-нелинейные стадии развития электрогидродинамической неустойчивости поверхности раздела жидкостей.
2. В первом случае, когда отношение плотностей равно отношению проницаемостей (или, что тоже самое  $A = A_E$ ) описана нелинейная динамика поверхности раздела вплоть до момента формирования особенности. С физической точки зрения полученные решения соответствуют начальным стадиям формирования конусов Тейлора на границе раздела сред. Во втором случае, когда отношение плотностей совпадает с обратным отношением проницаемостей ( $A = -A_E$ ), была продемонстрирована тенденция к формированию заостренных лунок на поверхности раздела.
3. Для общего случая, при котором нет ограничений для плотностей и диэлектрических проницаемостей жидкостей, предложена модель, позволяющая построить приближен-

ное решение задачи. В рамках развиваемого "локального" приближения удалось показать, что на границе раздела жидкостей в сильном вертикальном электрическом поле формируются слабые корневые особенности. В особых точках кривизна поверхности обращается в бесконечность, при чем, ее знак определяется отношением плотностей и диэлектрических проницаемостей.

В совокупности рассмотренные в работе случаи дают достаточно полную картину развития начальных стадий электрогидродинамической неустойчивости поверхности раздела двух диэлектрических жидкостей в сильном вертикальном электрическом поле.

Изложенные в настоящей главе научные результаты опубликованы в работах [97–101].

# Глава 3. Нелинейная динамика поверхности раздела жидкостей в вертикальном электрическом и гравитационном полях

## 3.1 Введение

В предыдущей главе было показано, что в общем случае на границе жидких диэлектриков в вертикальном электрическом поле формируются слабые корневые особенности, возникновение которых не нарушает малоугловое приближение. Однако, существует частный случай ( $\varepsilon_1/\varepsilon_2 = \rho_2/\rho_1$ ), в котором развитие неустойчивости приводит к значительному росту амплитуды возмущений, и, как следствие, нарушению малости углов наклона. Для него в слабо-нелинейном приближении может реализовываться режим движения жидкостей, при котором потенциалы скорости и электрического поля линейно связаны.

В настоящей главе мы покажем, что подобный режим реализуется для жидкостей с границей раздела в вертикальном электрическом и гравитационном полях (на фоне развития неустойчивости Релея-Тейлора). При этом не требуется использования слабо-нелинейного приближения. Редукция осуществляется в рамках полных уравнений движения жидкостей в трехмерной геометрии. Будет продемонстрировано, что существенный прогресс в аналитическом описании нелинейных волн на границе может быть достигнут для ситуации, когда потенциалы скорости ( $\Phi$ ) и электрического поля ( $\varphi$ ) линейно связаны

$$\varphi(x, y, z, t) = a\Phi(x, y, z, t) + f(t)z, \quad (3.1)$$

где  $a$  — постоянная  $f$  — некоторая гармоническая функция. С физической точки зрения условие (3.1) означает, что существует некоторая система координат, в которой жидкости движутся вдоль силовых линий электрического поля. Напомним, что сходная ситуация реализуется для Альфвеновских волн в идеальной жидкости. Уравнения магнитной гидродинамики допускают точное решение, при котором скорость жидкости и магнитное поле линейно связаны [73, 75, 76] — см. подробнее разд. 1.3.

В отсутствие силы тяжести возможность реализации режима (3.1) была выявлена в работе [70]. В этом случае дисперсионное соотношение для линейной волны имеет вид  $\omega^2 \sim -k^2$ , где  $\omega$  — частота,  $k$  — волновой вектор. Оно может быть разделено на две ветви  $\omega \sim \pm ik$ , соответствующее экспоненциально возрастающим и убывающим возмущениям поверхности. В [70] было показано, при помощи соотношения (3.1) можно разделить исходные уравнения на возрастающую и убывающую ветви решения (не только для линейных уравнений). Далее мы покажем, что этот результат может быть обобщен на случай, когда учитывается влияние силы тяжести (здесь мы не учитываем влияние капиллярных эффектов, что соответствует рассмотрению длинных волн).

Глава построена следующим образом. В разд. 3.2 мы приводим основные уравнения движения идеальной несжимаемой диэлектрической жидкостей с поверхностью раздела в вертикальных электрическом и гравитационном полях. В разд. 3.3 получено условие совместности исходных уравнений движения с условием пропорциональности потенциалов скорости и электрического поля (3.1). Выведены редуцированные уравнения движения, соответствующие этому режиму. Показано, что в пределе малого отношения плотностей жидкостей данные уравнения описывают процесс лапласовского роста. В следующем разд. 3.4 мы рассматриваем задачу о двумерном движении жидкости, для которой применимы методы конформного преобразования. Показано, что рассматриваемый режим устойчив к мелкомасштабным возмущениям. В разд. 3.5 мы возвращаемся к анализу общего случая, для которого отношение плотностей жидкостей является конечным. Получено нелинейное интегродифференциальное уравнение, описывающее слабо-нелинейную стадию развития неустойчивости. Показано, что данное уравнение может быть приведено к известному уравнению лапласовского роста (УЛР). Разд. 3.6 посвящен описанию динамики поверхности на основе точных периодических и локализованных решений уравнения лапласовского роста. В разд. 3.7



содержатся выводы по Главе 3.

### 3.2 Уравнения движения

Будем считать, что в невозмущенном состоянии поверхность раздела жидкостей представляет собой плоскость  $z = 0$ . Введем прямоугольную систему координат таким образом, что оси  $x$  и  $y$  лежали в этой плоскости, а ось  $z$  направлена по нормали к ней (геометрия задачи представлена на Рисунке 3.1). Положим, что отклонение поверхности раздела от плоскости  $z = 0$  задается функцией  $\eta(x, y, t)$ , т.е. уравнение  $z = \eta$  определяет профиль границы.

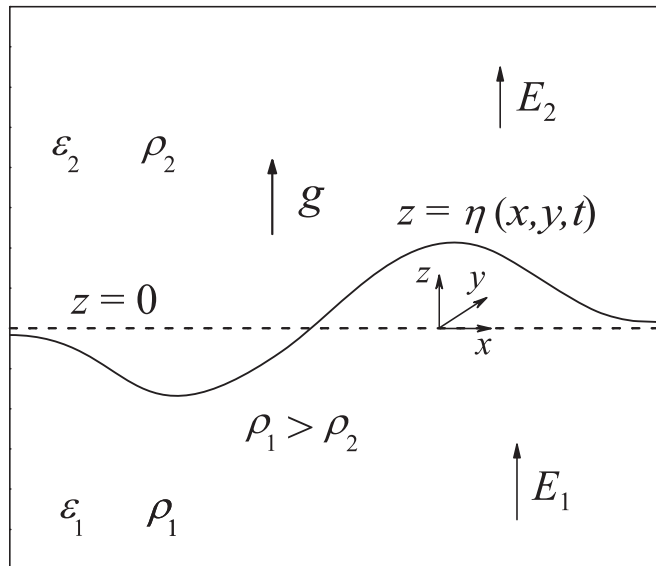


Рисунок 3.1: Схематическое изображение геометрии задачи.

Под внешним воздействием граница движется с ускорением, тогда в системе координат  $x, y, z$ , связанной с границей, можно ввести эффективное ускорение свободного падения  $g$ . Будем считать, что эффективное ускорение свободного падения направлено в вертикальном направлении, т.е. по оси  $z$ , при чем для общности, будем его функцией времени  $g = g(t)$ . Для реализации неустойчивости Релея-Тэйлора, необходимо, чтобы нижняя жидкость была более плотной чем верхняя  $\rho_1 > \rho_2$ .

Дополнительным фактором, дестабилизирующим границу может быть наличие внешнего электрического поля, направленного по оси  $z$ . Напряженность поля в нижней и верхней жидкостях обозначим за  $E_{1,2}(t)$ , соответственно. Для этих величин справедливо граничное

условие

$$\varepsilon_1 E_1(t) = \varepsilon_2 E_2(t), \quad (3.2)$$

где  $\varepsilon_{1,2}$  -диэлектрические проницаемости жидкостей.

Для безвихревого движения невязких несжимаемых жидкостей потенциалы скорости будут удовлетворять уравнениям Лапласа

$$\Delta \Phi_{1,2} = 0. \quad (3.3)$$

Для потенциалов электрического поля  $\varphi_{1,2}$  также справедливы уравнения Лапласа внутри жидкостей

$$\Delta \varphi_{1,2} = 0. \quad (3.4)$$

На границе раздела потенциалы скорости удовлетворяют условию

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_2}{\partial n}, \quad z = \eta(x, y, t), \quad (3.5)$$

где  $\partial/\partial n$  обозначает производную, направленную по нормали к поверхности  $z = \eta$ . Граничные условия для потенциалов электрического поля имеют вид

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad z = \eta(x, y, t), \quad (3.6)$$

$$\varepsilon_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial n} = \varepsilon_2 \frac{\partial \varphi_2}{\partial n}, \quad z = \eta(x, y, t), \quad (3.7)$$

т.е. напряженность электрического поля, нормальная компонента электрической индукции непрерывны на границе раздела жидкостей. Временная эволюция потенциалов скорости определяется динамическим граничным условием (нестационарным уравнением Бернулли)

$$\begin{aligned} & \rho_1 \left( \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} + \frac{(\nabla \Phi_1)^2}{2} \right) - \rho_2 \left( \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} + \frac{(\nabla \Phi_2)^2}{2} \right) - P_0(t) \\ & = -P_E + (\rho_1 - \rho_2)g(t)\eta, \quad z = \eta(x, y, t), \end{aligned} \quad (3.8)$$

где  $\varepsilon_0$  — электрическая постоянная. Правая часть данного выражения содержит электростатическое ( $P_E$ ) и гидростатическое давления. Здесь мы пренебрегаем капиллярными эффектами, что соответствует рассмотрению длинных волн. Согласно [102], электростатическое

давление на границе имеет вид

$$P_E = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{2} (\nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2).$$

Наличие функции времени  $P_0(t)$  в уравнении (3.8) связано с тем, что потенциалы скорости жидкостей определены с точностью до произвольной функции времени. Эта неоднозначность устраняется требованием, что

$$\eta = 0, \quad \Phi_{1,2} = 0, \quad \varphi_{1,2} = -E_{1,2}(t)z$$

в невозмущенном (стационарном) состоянии. Подставляя эти выражения в уравнение (3.8), мы получим для  $P_0$ :

$$P_0(t) = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)}{2} E_1(t)E_2(t).$$

Временная эволюция поверхности определяется кинематическим граничным условием

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} - (\nabla_{\perp}\eta \cdot \nabla_{\perp}\Phi_1), \quad z = \eta(x, y, t), \quad (3.9)$$

где  $\nabla_{\perp}$  — двумерный градиент в плоскости  $\{x, y\}$ . Условия на бесконечном удалении от границы имеют вид:

$$\Phi_{1,2} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \mp\infty, \quad (3.10)$$

$$\varphi_{1,2} \rightarrow -E_{1,2}(t)z, \quad z \rightarrow \mp\infty, \quad (3.11)$$

то есть движение жидкостей затухает, а электрическое поле становится однородным.

### 3.3 Редукция уравнений движения

Для удобства дальнейшего анализа перейдем к безразмерным обозначениям:

$$\Phi_{1,2} \rightarrow \Phi_{1,2}\sqrt{g_0\lambda_0^3}, \quad \varphi_{1,2} \rightarrow \varphi_{1,2}\sqrt{\frac{\rho_1 g_0 \lambda_0^3}{\varepsilon_0 \varepsilon_1}}, \quad E_{1,2} \rightarrow E_{1,2}\sqrt{\frac{\rho_1 g_0 \lambda_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_1}},$$

$$t \rightarrow t\sqrt{\lambda_0/g_0}, \quad \eta \rightarrow \eta \cdot \lambda_0, \quad y \rightarrow y \cdot \lambda_0, \quad z \rightarrow z \cdot \lambda_0, \quad g \rightarrow g \cdot g_0,$$

где  $g_0$  — характерное значение ускорения свободного падения и  $\lambda_0$  — характерный пространственный масштаб возмущений поверхности. Мы считаем, что значение  $\lambda_0$  много больше чем значение капиллярной постоянной  $\lambda_c$ ,

$$\lambda_0 \gg \lambda_c \equiv \sqrt{\frac{2\sigma}{g_0(\rho_1 - \rho_2)}}, \quad (3.12)$$

тогда капиллярные эффекты могут не учитываться (здесь  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения).

Для системы из двух жидкостей выражение (3.1) принимает следующий вид:

$$\varphi_{1,2}(x, y, z, t) = a_{1,2}\Phi_{1,2}(x, y, z, t) + f_{1,2}(t)z, \quad (3.13)$$

т.е. оно должно выполняться для каждой жидкости. Коэффициенты пропорциональности между потенциалами  $a_{1,2}$  различны для нижней и верхней жидкостей. Найдем условия совместности условий (3.13) и уравнений движения границы (3.3)–(3.11). Функции  $f_{1,2}$  могут быть найдены из граничных условий (3.10) и (3.11):

$$f_{1,2} = -E_{1,2}(t).$$

Условия (3.5) и (3.7) приводят к следующему выражению для связи между параметрами  $a_{1,2}$ :

$$\varepsilon_1 a_1 = \varepsilon_2 a_2. \quad (3.14)$$

Из (3.6) следует, что потенциалы скорости удовлетворяют условию на границе раздела жидкостей

$$a_1(\varepsilon_2\Phi_1 - \varepsilon_1\Phi_2) = (\varepsilon_2 - \varepsilon_1)E_1\eta, \quad z = \eta(x, y, t).$$

Перепишем теперь кинематическое граничное условие (3.9), исключив из него функцию  $\eta(x, y, t)$ . Это можно сделать при помощи следующих выражений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \eta}{\partial t} \cdot \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right) &= - \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial t} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial t} \right), \quad z = \eta(x, y, t), \\ \nabla_{\perp} \eta \cdot \left( \frac{\partial \varphi_1}{\partial z} - \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} \right) &= - (\nabla_{\perp} \varphi_1 - \nabla_{\perp} \varphi_2), \quad z = \eta(x, y, t), \end{aligned}$$

полученных при помощи дифференцирования (3.6). Таким образом, кинематическое граничное условие примет вид

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial t} - \frac{\partial\varphi_2}{\partial t} + (\nabla\Phi_1 \cdot \nabla\varphi_1) - (\nabla\Phi_1 \cdot \nabla\varphi_2) = 0, \quad z = \eta(x, y, t).$$

С учетом соотношений (3.13) получим

$$\begin{aligned} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial t} - \varepsilon^{-1} \frac{\partial\Phi_2}{\partial t} + (\nabla\Phi_1)^2 - \varepsilon^{-1} (\nabla\Phi_1 \cdot \nabla\Phi_2) \\ & - E_1 \frac{(1 - \varepsilon^{-1})}{a_1} \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} - \frac{dE_1}{dt} \frac{(1 - \varepsilon^{-1})}{a_1} \eta = 0, \quad z = \eta(x, y, t), \end{aligned} \quad (3.15)$$

где  $\varepsilon = \varepsilon_2/\varepsilon_1$  — отношение диэлектрических проницаемостей жидкостей.

Условие равенства нормальных компонент скоростей (3.5) может быть переписано в виде

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} - \nabla_{\perp}\Phi_1 \cdot \nabla_{\perp}\eta = \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} - \nabla_{\perp}\Phi_2 \cdot \nabla_{\perp}\eta, \quad z = \eta(x, y, t).$$

Исключая функцию  $\eta$ , мы получим следующую связь между производными потенциалов на границе раздела жидкостей

$$\begin{aligned} & a_1 ((\nabla\Phi_1 \cdot \nabla\Phi_2) - \varepsilon^{-1} (\nabla\Phi_2)^2) - E_1 (1 - \varepsilon^{-1}) \frac{\partial\Phi_2}{\partial z} \\ & = a_1 ((\nabla\Phi_1)^2 - \varepsilon^{-1} (\nabla\Phi_1 \cdot \nabla\Phi_2)) - E_1 (1 - \varepsilon^{-1}) \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}. \end{aligned}$$

Используя данное соотношение, а также (3.13) и (3.14), перепишем динамическое граничное условие в виде

$$\begin{aligned} & \frac{\partial\Phi_1}{\partial t} - \rho \frac{\partial\Phi_2}{\partial t} + \frac{(1 + a_1^2)}{2} (\nabla\Phi_1)^2 + \frac{(a_1^2 \varepsilon^{-1} - \rho)}{2} (\nabla\Phi_2)^2 - a_1^2 \varepsilon^{-1} (\nabla\Phi_1 \cdot \nabla\Phi_2) \\ & - a_1 E_1 (1 - \varepsilon^{-1}) \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} - g(1 - \rho)\eta = 0, \quad z = \eta(x, y, t), \end{aligned} \quad (3.16)$$

где  $\rho = \rho_2/\rho_1$ .

Сравним уравнения (3.15) и (3.16), которые были получены из кинематического и динамического граничного условия, соответственно. Оба уравнения определяют эволюцию потенциалов скорости на границе и, в общем случае, система данных уравнений является переопределенной. Понятно, что для их совместности необходимо, чтобы коэффициенты при

одинаковых слагаемых в этих уравнениях были равны друг другу (в этом случае уравнение (3.15) полностью совпадает с уравнением (3.16)):

$$\begin{aligned} \rho = \varepsilon^{-1}, \quad (1 + a_1^2)/2 = 1, \quad (a_1^2 \varepsilon^{-1} - \rho)/2 = 0, \\ a_1^2 = 1, \quad g(1 - \rho) = \frac{dE_1}{dt} \frac{(1 - \varepsilon^{-1})}{a_1}. \end{aligned}$$

Нетрудно увидеть, что эти условия выполняются при:

$$\rho \varepsilon = 1, \quad a_1 = \pm 1, \quad \frac{dE_1}{dt} = a_1 g(t). \quad (3.17)$$

Данные соотношения имеют смысл условий совместности исходных уравнений движения и линейных соотношений между потенциалами электрического поля и потенциалами скорости жидкостей (3.13).

При выполнении условий (3.17) эволюция потенциалов скорости определяется неавтономным уравнением (3.15). Это уравнение может быть приведено к автономному виду если ввести вспомогательные потенциалы

$$\phi_{1,2} = a_1 \Phi_{1,2}/E_1(t),$$

и новую переменную времени  $\tau$ :

$$\tau(t) = \tau_0 + a_1 \int_{t_0}^t E_1(t') dt', \quad (3.18)$$

где  $t_0$  и  $\tau_0$  — некоторые постоянные.

В итоге мы получим систему автономных дифференциальных уравнений, описывающих такой режим движения, при котором потенциалы скорости и электрического поля являются линейно зависимыми функциями:

$$\Delta \phi_1 = 0, \quad z < \eta(x, y, \tau), \quad (3.19)$$

$$\Delta \phi_2 = 0, \quad z > \eta(x, y, \tau), \quad (3.20)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \frac{\partial \phi_1}{\partial z} - (\nabla_{\perp} \eta \cdot \nabla_{\perp} \phi_1), \quad z = \eta(x, y, \tau), \quad (3.21)$$

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial n} = \frac{\partial \phi_2}{\partial n}, \quad z = \eta(x, y, \tau), \quad (3.22)$$

$$\phi_1 - \rho \phi_2 = (1 - \rho)\eta, \quad z = \eta(x, y, \tau), \quad (3.23)$$

$$\phi_{1,2} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow \mp \infty. \quad (3.24)$$

Мы будем называть эту систему уравнений редуцированной системой уравнений движения.

Из уравнений (3.17) следует, что условия реализации этого режима движения имеют вид:

$$\varepsilon_1 \rho_1 = \varepsilon_2 \rho_2, \quad (3.25)$$

$$E_1(t) = E' + a_1 \int_{t_0}^t g(t') dt', \quad (3.26)$$

где  $E'$  — некоторая константа. Отметим, что условие (3.25) на параметры жидкостей (произведение плотности жидкости на ее диэлектрическую проницаемость должно быть инвариантом) было ранее получено в работе [70] в отсутствии поля тяжести. При наличии эффективного поля тяжести появляется дополнительное условие на связь напряженности гравитационного и электрического полей (3.26). Обсудим эту связь подробнее.

Как будет показано в разд. 3.5, в линейном приближении дисперсионное соотношение для уравнений (3.19)–(3.24) имеет вид,

$$\omega = iAk, \quad A = (\rho_1 - \rho_2)/(\rho_1 + \rho_2)$$

где  $\omega$  — частота в терминах нового времени  $\tau$ ,  $k \geq 0$  — волновое число,  $A \geq 0$  — число Атвуда. В соответствии с этим дисперсионным соотношением, амплитуда возмущений экспоненциально нарастает со ростом  $\tau$ . Как видно из (3.18), величина  $\tau$  нарастает со временем  $t$  при условии, что  $a_1 E_1(t) > 0$ . В этом случае рассматриваемая нами редукция выделяет нарастающую ветвь решений из исходных уравнений движения. В противном случае (т.е. если  $a_1 E_1(t) < 0$ ) величина  $\tau$  уменьшается со временем  $t$  и, следовательно, редукция вычленяет затухающие со временем решения в исходных уравнениях. Подобные решения не представляют значительного физического интереса. Помимо того, что они релаксируют к нулю, эти решения, как будет показано в разд. 3.4, неустойчивы по отношению к малым возмущениям, нарушающим условия (3.13).

Из общих соображений понятно, что поведение границы раздела не может зависеть от

направления внешнего электрического поля (т.е. от знака величины  $E_1$ ) — движение поверхности определяется электростатическим давлением, определяемым квадратом напряженности поля. В рамках рассматриваемой редукции это свойство проявляется как инвариантность уравнения (3.15) или (3.16) по отношению к одновременной замене  $E_1 \rightarrow -E_1$  и  $a_1 \rightarrow -a_1$ . Не теряя общности мы положим  $a_1 = 1$ . Тогда условием развития неустойчивости будет  $E_1 > 0$ , обеспечивающее выделение нарастающей со временем ветви решений.

Проанализируем, как сочетается условие положительности  $E_1$  с условием (3.26). Рассмотрим несколько простейших ситуаций. Пусть, к примеру,  $g = g_1 = \text{const}$ . В этом случае

$$E_1(t) = g_1(t - t_1), \quad \tau(t) = \tau_0 + g_1(t - t_1)^2/2,$$

где  $t_1 = t_0 - E_0/g_1$ . При  $g_1 > 0$ , т.е. когда вектор ускорения свободного падения направлен от тяжелой жидкости к легкой, напряженность поля линейно увеличивается со временем, а при  $g_1 < 0$  — уменьшается. В первом случае  $E_1 > 0$ , и, следовательно, возмущения поверхности нарастают со временем (при  $t > t_1$ ). Во втором случае условие  $E_1 > 0$  реализуется при  $t < t_1$ , т.е. на достаточно больших временах нарастание возмущений поверхности сменится их затуханием.

Далее, пусть

$$g(t) = g_2/(1 + t^2),$$

где  $g_2 > 0$  — некоторая постоянная. Это соответствует тому, что поверхность раздела испытывает кратковременное ускорение (подобная ситуация соответствует, например для неустойчивости Рихтмайера-Мешкова). В этом случае

$$E_1(t) = E_0 + g_2 (\arctan t + \pi/2),$$

где мы выбрали  $t_0 \rightarrow \infty$ . В соответствии с этим выражением происходит постепенное изменение напряженности электрического поля со значения  $E_0$  до значения  $E_0 + g_2\pi$ . Аналогично можно рассмотреть и другие ситуации, например, вибрацию жидкостей ( $g$  меняется периодически) и т.п.

Вернемся теперь к редуцированной системе (3.19)–(3.24). Рассмотрим формальный предел  $\rho \ll 1$ , когда достаточно рассматривать движение лишь нижней (тяжелой) жидкости.



Перепишем систему уравнений (3.19)–(3.24) в движущейся системе координат, что соответствует заменами:

$$z = \tilde{z} + \tau, \quad \eta = \tilde{\eta} + \tau, \quad \phi_1 = \tilde{\phi}_1 + \tilde{z}.$$

Преобразование производных при этих заменах имеет вид:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial z} = \frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial \tilde{z}} + 1, \quad \frac{\partial \phi_1}{\partial \tau} = \frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial \tau} + \frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial \tilde{z}} + 1, \quad \frac{\partial \eta}{\partial \tau} = \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tau} + 1.$$

В итоге мы получим следующие редуцированные уравнения движения для нижней жидкости:

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{\phi}_1 &= 0, & \tilde{z} &< \tilde{\eta}(x, y, \tau), \\ \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tau} &= \frac{\partial \tilde{\phi}_1}{\partial n} \sqrt{1 + (\nabla_{\perp} \eta)^2}, & \tilde{z} &= \tilde{\eta}(x, y, \tau), \\ \tilde{\phi}_1 &= 0, & \tilde{z} &= \tilde{\eta}(x, y, \tau), \\ \tilde{\phi}_1 &\rightarrow -\tilde{z}, & \tilde{z} &\rightarrow -\infty. \end{aligned}$$

Отметим, что в данных уравнениях, в отличие от (3.19)–(3.24), кинематическое граничное условие записано через нормальную производную. В соответствии с этими уравнениями, в новых переменных скорость движения поверхности пропорциональна нормальной производной гармонического потенциала скорости, а сам потенциал не меняется вдоль границы. Такой режим движения поверхности раздела называют процессом лапласовского роста [103–106]. Он реализуется, например, для движения границы двух жидкостей с существенно различными вязкостями, при течении через пористую среду, при развитии электрогидродинамической неустойчивости заряженной поверхности жидкого гелия и т.д. Как было продемонстрировано в настоящем разделе, к уравнениям, описывающим процесс лапласовского роста, сводится и рассмотрение границы раздела двух диэлектрических жидкостей в вертикальных электрическом и гравитационном полях при выполнении условий (3.25) и (3.26), а также условия малости плотности верхней жидкости ( $\rho_2 \ll \rho_1$ ).

Обсудим теперь характерные значения физических величин, для которых реализуется рассматриваемый режим. Согласно условию (3.25) отношение плотностей жидкостей равно обратному отношению диэлектрических проницаемостей жидкостей. Данное условие может быть реализовано с приемлемой точностью для границы раздела между жидкими кремний-

органическими полимерами и органическим маслом (как правило они являются несмешиваемыми). Для оценок рассмотрим пару несмешивающихся жидкостей: полиметилфенилсилоксан (ПФМС) и льняное масло, см. Таблицу 2.1. Для данной пары  $A \approx 0.084$  и  $\varepsilon\rho \approx 1.002$ , т.е. условие (3.17) выполняется. Определим теперь значение напряженности внешнего электрического поля  $E_1$  из условия (3.17). Возвращаясь к размерным величинам и заменяя производную по времени  $dE_1/dt$  на отношение характерного поля ( $E_0$ ) к характерному времени развития неустойчивости ( $T$ ), получим

$$E_0 \approx T g_0 \sqrt{\frac{\rho_1}{\varepsilon_0 \varepsilon_1}},$$

где  $T$  оценивается по формуле

$$T \approx \sqrt{\frac{\lambda_0}{A g_0}}.$$

Капиллярная постоянная имеет значение порядка  $\lambda_c = 0.3 - 1.1$  мм, где мы положили  $g_0 \approx 9.8$  м/с<sup>2</sup> и  $\sigma = 10^{-4} - 10^{-3}$  Н/м (см., к примеру, работу [89], в которой экспериментально рассматривалось влияние электрического поля на поверхность раздела кремний-органических полимеров и различных минеральных и органических масел). Пусть характерная длина волны возмущений  $\lambda_0 = 5$  мм, т.е. условие  $\lambda_0 \gg \lambda_c$  выполняется. Тогда время развития неустойчивости оценивается как  $T \approx 0.08$  с. В итоге мы найдем значение напряженности электрического поля  $E_0 \approx 5 \times 10^6$  В/м. Важно, что данное значение меньше чем характерные значения напряженности поля ( $10^7 - 10^8$  В/м), при котором происходит пробой жидкости.

### 3.4 Устойчивость редукции

В предыдущем разделе мы продемонстрировали, что редуцированные уравнения движения (3.19)–(3.24) в пределе малого отношения плотностей жидкостей сводятся к уравнениям, описывающим процесс лапласовского роста. Рассмотрим теперь аналогичный предел для исходных (не редуцированных) уравнений движения. Это позволит нам исследовать на устойчивость соответствующий процессу лапласовского роста режим движения поверхности раздела.

В пределе  $\rho \rightarrow 0$  можно не учитывать влияния верхней жидкости на движение гра-

ницы (соответствующие слагаемые исчезают из нестационарного уравнения Бернулли (3.8). Аналогично, в пределе  $\varepsilon \rightarrow \infty$  электрическое поле не проникает в верхнюю жидкость (оно полностью экранируется поверхностным зарядом). Тогда можно считать  $E_2 = 0$  (см. условие (3.2)) и, следовательно,  $\varphi_2 = 0$ . При этом, как следствие (3.6), в нижней жидкости потенциал электрического поля на границе жидкости можно считать равным нулю.

В итоге получаем систему уравнений, соответствующую пределам  $\varepsilon_1 \ll \varepsilon_2$  и  $\rho_1 \gg \rho_2$ :

$$\Delta\Phi_1 = 0, \quad z < \eta(x, y, t), \quad (3.27)$$

$$\Delta\varphi_1 = 0, \quad z < \eta(x, y, t), \quad (3.28)$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial t} + \frac{(\nabla\Phi_1)^2}{2} = \frac{E_1^2}{2} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial\varphi_1}{\partial n} \right)^2 + g\eta, \quad z = \eta(x, y, t), \quad (3.29)$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} - (\nabla_{\perp}\eta \cdot \nabla_{\perp}\Phi_1), \quad z = \eta(x, y, t), \quad (3.30)$$

$$\varphi_1 = 0, \quad z = \eta(x, y, t), \quad (3.31)$$

$$\varphi_1 \rightarrow -E_1(t)z, \quad z \rightarrow -\infty, \quad (3.32)$$

где при выводе безразмерного нестационарного уравнения Бернулли (3.29) учитывались условия (3.6) и (3.7).

Ограничимся рассмотрением плоской симметрии задачи, когда все величины зависят лишь от пары пространственных переменных  $x$  и  $z$ , и не зависят от  $y$ . По аналогии с работами [79–81], где рассматривалась динамика жидкости в поле тяжести (т.е. было  $E_{1,2} = 0$ ), осуществим конформное преобразование занимаемой ею области в полуплоскость  $v \leq 0$  и  $-\infty < u < \infty$ . Свободная поверхность в новых переменных задается параметрическими выражениями:

$$z = Z(u, t), \quad x = X(u, t) = u - \hat{H}Z(u, t), \quad (3.33)$$

где  $\hat{H}$  — оператор Гильберта, определяемый выражением:

$$\hat{H}F(x) = \frac{1}{\pi} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{F(x')}{x - x'} dx'.$$

Уравнения Лапласа (3.27) и (3.28) для потенциалов в переменных  $\{u, v\}$  решаются аналитически. В итоге уравнения движения жидкости (3.27)–(3.32) сводятся к паре уравнений

на эволюцию границы:

$$\begin{aligned} \Psi_t \left(1 - \hat{H}Z_u\right) + \Psi_u \hat{H}Z_t + \hat{H} \left(Z_t \Psi_u - Z_u \Psi_t\right) = \\ -E_1^2 \hat{H}Z_u + g \left(Z - Z\hat{H}Z_u - \hat{H}ZZ_u\right), \end{aligned} \quad (3.34)$$

$$Z_t \left(1 - \hat{H}Z_u\right) + Z_u \hat{H}Z_t = -\hat{H}\Psi_u, \quad (3.35)$$

где функция  $\Psi(u, t)$  задает значение потенциала скорости при  $v = 0$ . Эти уравнения совпадают с полученными в [79–81] за исключением первого слагаемого в правой части (3.34), которое учитывает электростатическое давление. Вывод этого слагаемого подробно описан в работе [86].

В новых переменных условие пропорциональности потенциалов поля и скорости (3.13) имеет вид:

$$\Psi = f(t)Z, \quad (3.36)$$

где  $f$  — некоторая функция времени. Подставляя его в (3.34) и (3.35), получим:

$$\begin{aligned} Z_t \left(1 - \hat{H}Z_u\right) + Z_u \hat{H}Z_t = -\frac{E_1^2}{f} \hat{H}Z_u + \frac{g - f_t}{f} \left(Z - Z\hat{H}Z_u - \hat{H}ZZ_u\right), \\ Z_t \left(1 - \hat{H}Z_u\right) + Z_u \hat{H}Z_t = -f \hat{H}Z_u. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Эти уравнения совместны (иными словами — они тождественно совпадают), если

$$f_t = g, \quad f = \pm E_1 \equiv a_1 E_1(t), \quad (3.38)$$

что согласуется с (3.17). При этом (3.37) приобретает смысл редуцированного уравнения движения границы раздела. Заметим, что данное уравнение можно привести к автономному виду заменой времени (3.18). В итоге приходим к интегро-дифференциальному уравнению

$$Z_\tau \left(1 - \hat{H}Z_u\right) + Z_u \hat{H}Z_\tau + \hat{H}Z_u = 0, \quad (3.39)$$

которое приводится к компактному виду

$$\text{Im}(\bar{W}_\tau W_u) = 1, \quad (3.40)$$

посредством введения комплексной функции

$$W = X + i(Z - \tau) \equiv u - \hat{H}Z + iZ - i\tau.$$

Уравнение (3.40) или, что то же самое, уравнение (3.39) представляет собой известное уравнение лапласовского роста (УЛР) [107–109], но записанное для вспомогательной переменной времени  $\tau$ . Оно замечательно тем, что допускает бесконечное число частных решений, выраженных в элементарных функциях (см. [110–113] и ссылки там). В разд. 3.6 мы приведем некоторые его простейшие решения для иллюстрации характера эволюции поверхности раздела.

Проведем анализ устойчивости редукции (3.39) уравнений (3.34) и (3.35). Положим

$$\Psi = f(t)Z + \delta(u, t),$$

где  $\delta$  — некоторое возмущение. При  $\delta = 0$  это выражение превращается в соотношение (3.36), определяющее редукцию. При  $\delta \neq 0$  режим движения жидкости будет отличаться от описываемого УЛР особого режима. Нашей задачей будет рассмотреть временную эволюцию возмущения  $\delta$  и выяснить, будет оно нарастать или затухать со временем.

Уравнения (3.34) и (3.35) при переходе от функции  $\Psi$  к новой функции  $\delta$  принимают следующий вид:

$$Z_t \left(1 - \hat{H}Z_u\right) + Z_u \hat{H}Z_t + f \hat{H}Z_u = -\hat{H}\delta_u, \quad (3.41)$$

$$\delta_t - \delta_t \hat{H}Z_u + \delta_u \hat{H}Z_t + Z_t \hat{H}\delta_u - Z_u \hat{H}\delta_t - f \hat{H}\delta_u = 0, \quad (3.42)$$

где второе уравнение мы получили вычитанием (3.34) из (3.35) с учетом условий (3.38).

Линейное по  $\delta$  уравнение (3.42) описывает эволюцию возмущения  $\delta$  на фоне эволюции  $Z$ . Пусть характерный пространственный и временной масштаб изменения функции  $\delta$  много меньше соответствующих масштабов для  $Z$  и  $f$ . Тогда при анализе эволюции возмущения можно считать функции  $Z$  и  $f$  и их производные константами. Для построения дисперсионного соотношения, подставим сюда  $\delta$  в виде:  $\delta \sim e^{iku - i\omega t}$ . Находим в итоге:

$$\omega = ipk, \quad p = -\frac{f - Z_t + i\hat{H}Z_t}{1 - \hat{H}Z_u - iZ_u}. \quad (3.43)$$

Характер поведения возмущения  $\delta$  полностью определяется значением параметра  $p$ . Амплитуда возмущения будет затухать при  $\operatorname{Re} p < 0$  и нарастать при  $\operatorname{Re} p > 0$ . Из (3.43) находим:

$$\operatorname{Re} p = -\frac{f - Z_t + Z_t \hat{H} Z_u - Z_u \hat{H} Z_t - f \hat{H} Z_u}{(1 - \hat{H} Z_u)^2 + Z_u^2}.$$

Можно заметить, что числитель этого выражения близок по структуре с уравнением (3.41). С его помощью находим

$$\operatorname{Re} p = -\frac{f + \hat{H} \delta_u}{(1 - \hat{H} Z_u)^2 + Z_u^2} \approx -\frac{a_1 E_1}{(1 - \hat{H} Z_u)^2 + Z_u^2},$$

где мы использовали малость возмущения  $\delta$ . Как следствие, при  $a_1 E_1(t) > 0$  (в этой ситуации редуцированные уравнения описывают развитие неустойчивости поверхности), будет  $\operatorname{Re} p < 0$ . Это доказывает устойчивость исследуемого режима движения, соответствующего условию  $\Psi = fZ$ , по отношению к малым мелкомасштабным возмущениям  $\delta \equiv \Psi - fZ$ . При доказательстве мы не использовали каких-либо существенных ограничений на вид функции  $Z$ . Следует отметить, что устойчивость аналогичного режима движения без учета поля тяжести была доказана в работах [63, 70] в более общем трехмерном случае. Однако при этом на форму поверхности налагалось условие, что она является однозначной функцией координат.

Отметим, что при  $a_1 E_1(t) < 0$  (в этом случае решения редуцированных уравнения движения затухают со временем) будет  $\operatorname{Re} p > 0$ , т.е. соответствующий редуцированный режим движения неустойчив. Это дает нам дополнительное основание не рассматривать эту ветвь решений исходных уравнений.

### 3.5 Уравнение лапласовского роста

Рассмотрим в рамках редуцированных уравнений (3.19)–(3.24) начальные стадии развития неустойчивости, для которых выполняется условие малости углов наклона:  $|\nabla_{\perp} \eta(x, y, \tau)| \sim \alpha \ll 1$ . В этом случае потенциалы скорости можно разложить в ряд по степеням  $\eta$  в окрестности плоскости  $z = 0$ , подробно эта процедура описана в разд. 2.3.

Выражения для значения потенциалов на границе (2.9) и (2.10) в данном случае примут

вид:

$$\begin{aligned}\phi_1|_{z=\eta} &= A\eta + A(1-A) \left[ \eta \hat{k}\eta + \hat{k}^{-1} \nabla_{\perp}(\eta \nabla_{\perp} \eta) \right] + O(\alpha^3), \\ \phi_2|_{z=\eta} &= A\eta - A(1-A) \left[ \eta \hat{k}\eta + \hat{k}^{-1} \nabla_{\perp}(\eta \nabla_{\perp} \eta) \right] + O(\alpha^3).\end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в кинематическое граничное условие (3.21), получаем интегро-дифференциальное уравнение на временную эволюцию функции  $\eta(x, y, \tau)$ ,

$$\eta_{\tau} = A\hat{k}\eta - A^2 \left[ \hat{k}\eta \hat{k}\eta + \nabla_{\perp}(\eta \nabla_{\perp} \eta) \right] + O(\alpha^3), \quad (3.44)$$

учитывающее влияние квадратичных нелинейностей. Это уравнение есть обобщение уравнения (2.36), учитывающее влияние силы тяжести. Оно будет предметом нашего дальнейшего рассмотрения.

Как следует из (3.44), в линейном приближении эволюция возмущений поверхности будет описываться уравнением

$$\eta_{\tau} = A\hat{k}\eta. \quad (3.45)$$

Соответствующее ему дисперсионное соотношение получим, полагая

$$\eta \sim e^{ik_x x + ik_y y - i\omega \tau},$$

где  $\omega$  — частота в терминах нового времени  $\tau$ . Находим в итоге простое дисперсионное соотношение,

$$\omega = iAk,$$

которое уже обсуждалось в разд. 3.3. В соответствии с ним малые периодически возмущения поверхности экспоненциально нарастают с ростом нового времени  $\tau(t)$ ; зависимость от времени  $t$ , как видно из (3.18), будет несколько более сложной.

Отдельного упоминания требует предел малого числа Атвуда,  $A \rightarrow 0$ , когда плотности верхней и нижней жидкостей близки, но не совпадают. В уравнении (3.44) перед квадратично нелинейным слагаемым стоит квадрат числа Атвуда. Как следствие, для описания начальных стадий развития неустойчивости в пределе малых  $A$  вполне достаточно использовать линейное уравнение (3.45), а квадратичными нелинейностями можно пренебречь.

Как следует из (3.44), влияние нелинейных членов будет нарастать с ростом числа Ат-

вуда. Рассмотрим теперь случай общего положения, когда  $A$  — конечно. Будем считать для простоты, что возмущения поверхности обладают плоской симметрией: функция  $\eta$  не зависит от переменной  $y$ . Оператор  $\hat{k}$  в плоской геометрии выражается через оператор Гильберта:  $\hat{k} = -\hat{H}\partial_x$  и, следовательно, уравнение (3.44) примет следующий вид:

$$\eta_\tau = -A\hat{H}\eta_x - A^2 \left( \eta\eta_x + \hat{H}\eta\hat{H}\eta_x \right)_x + O(\alpha^3). \quad (3.46)$$

Перепишем уравнение (3.46) в терминах новой независимой переменной  $u$ , с использованием которой форма поверхности  $z = \eta(x, t)$  представима в параметрическом виде:

$$z = Z(u, \tau), \quad x = Au - A\hat{H}Z(u, \tau). \quad (3.47)$$

Очевидно, что эта запись аналогична использованной нами ранее при переходе к конформным переменным. Связь между функциями  $\eta$  и  $Z$ , определяющими отклонение поверхности от невозмущенного (плоского) состояния в переменных  $x$  и, соответственно,  $u$  задается соотношением:

$$\eta \left( Au - A\hat{H}Z, \tau \right) = Z(u, \tau).$$

Перепишем входящие в уравнение (3.46) слагаемые с использованием функции  $Z(u, \tau)$ :

$$\eta_\tau = Z_\tau + Z_u\hat{H}Z_\tau + O(\alpha^3),$$

$$A^2 \left( \eta\eta_x + \hat{H}\eta\hat{H}\eta_x \right)_x = \left( ZZ_u + \hat{H}Z\hat{H}Z_u \right)_u + O(\alpha^3),$$

$$A\hat{H}\eta_x \equiv -\frac{A}{\pi} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta(x', \tau)}{(x - x')^2} dx' = -\frac{1}{\pi} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Z(u', \tau) \left( 1 - \hat{H}Z_{u'}(u', \tau) \right)}{\left( u - \hat{H}Z(u, \tau) - u' + \hat{H}Z(u', \tau) \right)^2} du'.$$

Раскладывая знаменатель в последнем выражении в ряд Тейлора по  $Z$ , получаем после несложных преобразований:

$$\begin{aligned} A\hat{H}\eta_x &= -\frac{1}{\pi} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{Z(u', \tau) \left( 1 - \hat{H}Z_{u'}(u', \tau) \right)}{(u - u')^2} \left( 1 + \frac{\hat{H}Z(u, \tau) - \hat{H}Z(u', \tau)}{(u - u')/2} \right) du' + O(\alpha^3) \\ &= \hat{H}Z_u + \left( \hat{H}Z_u\hat{H}Z \right)_u - \hat{H}Z \cdot \hat{H}Z_{uu} + O(\alpha^3). \end{aligned}$$



Подстановка в (3.46) дает:

$$Z_\tau + Z_u \hat{H} Z_\tau = -\hat{H} Z_u - (\hat{H} Z_u)^2 + O(\alpha^3),$$

где мы учли следующее свойство оператора Гильберта:

$$2\hat{H}Z\hat{H}Z = (\hat{H}Z)^2 - Z^2.$$

Поскольку в основном порядке  $Z_\tau = -\hat{H}Z_u$ , то для нелинейного члена в правой части уравнения можно положить:

$$(\hat{H}Z_u)^2 = -Z_\tau \hat{H}Z_u + O(\alpha^3).$$

В итоге уравнение на движение поверхности примет вид:

$$Z_\tau \left(1 - \hat{H}Z_u\right) + Z_u \hat{H}Z_\tau + \hat{H}Z_u = O(\alpha^3), \quad (3.48)$$

что соответствует УЛР (см. уравнение (3.39)). Отметим, что, как было показано в разд. 3.4, это уравнение становится точным в ситуации, когда отношение плотностей жидкостей мало ( $A \rightarrow 1$ ). При  $A \rightarrow 0$  эволюция поверхности на начальных стадиях развития неустойчивости описывается линейным уравнением (3.45), а при  $0 < A < 1$  УЛР (3.48) применимо на слабо-нелинейных стадиях.

### 3.6 Анализ поведения поверхности

В настоящем разделе мы рассмотрим эволюцию плоских волн на поверхности раздела жидкостей в рамках УЛР (3.48). Это уравнение описывает динамику поверхности с точностью до квадратичных нелинейностей при  $0 < A < 1$ , а при  $A = 1$  становится точным. В последнем случае редуцированное уравнение движения (3.48) позволяет исследовать эволюцию поверхностных волн произвольной амплитуды.

Простейшее периодическое решение уравнения (3.48) можно построить, воспользовавшись подстановкой:

$$Z(u, \tau) = a(\tau) - b(\tau) \cos u. \quad (3.49)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых гармониках, получим следующие обыкновенные дифференциальные уравнения на амплитуды  $a$  и  $b$ :

$$a_\tau + bb_\tau = 0, \quad b_\tau + ba_\tau = b.$$

Решая их, находим, что временная эволюция амплитуд задается выражениями:

$$\ln b - b^2/2 - \ln b_0 + b_0^2/2 = \tau - \tau_0, \quad a = -b^2/2, \quad (3.50)$$

где  $b_0$  — значение амплитуды  $b$  в начальный момент времени  $\tau = \tau_0$  (считаем, что  $0 < b_0 < 1$ ). Соотношения (3.47), (3.49) и (3.50) задают точное частное решение задачи. В соответствии с ними, когда амплитуда достигнет равного единице значения, т.е. будет  $b = 1$  в некоторый момент времени  $\tau = \tau_c$ , профиль поверхности становится сингулярным (см. Рисунок 3.2). Действительно, в момент  $\tau = \tau_c$  (для исходной переменной времени  $t$  момент формирования особенности  $t_c$  соответствует  $\tau(t_c) = \tau_c$ ) поверхность раздела жидкостей задается выражениями

$$z = -1/2 - \cos u, \quad x = Au - A \sin u.$$

Разложение вблизи точки  $u = 0$  по Тейлору в основном порядке дает для формы границы в окрестности особенности:

$$z \approx -3/2 + u^2/2, \quad x \approx Au^3/6.$$

Исключая параметр  $u$ , находим:

$$z \approx -3/2 + (9/2)^{1/3} |x/A|^{2/3}, \quad (3.51)$$

что соответствует точке заострения (точке возврата первого рода). В этой точке в бесконечность за конечное время обращаются напряженность электрического поля и скорость жидкости,

$$\eta_t = E_1(a_\tau - b_\tau) \sim -(\tau_c - \tau)^{-1/2} \sim -(t_c - t)^{-1/2},$$

где учтена связь  $\tau$  и  $t$  (3.18).

Перейдем теперь к рассмотрению эволюции пространственно локализованных возмуще-

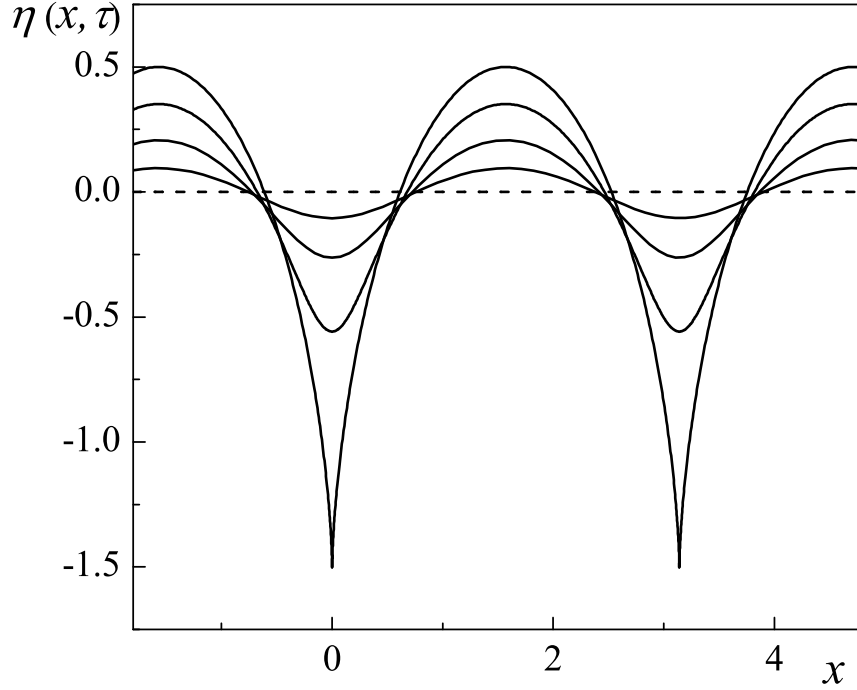


Рисунок 3.2: Эволюция периодического возмущения для  $A = 1/2$  и  $b_0 = 0.1$ . Профиль поверхности раздела показан в последовательные моменты времени  $\tau = 0$ ,  $\tau = 0.5$ ,  $\tau = 1$  и  $\tau = \tau_c \approx 1.38$ . Пунктирная линия соответствует невозмущенному состоянию системы ( $z = 0$ ).

ний поверхности раздела. Соответствующие точные решения уравнения (3.48) можно получить, представляя функцию  $Z$  в виде (более общее семейство решений рассмотрено в [112]):

$$Z(u, \tau) = -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^N s_n \ln(u^2 + q_n^2(\tau)) + \frac{1}{2} \left( \sum_{n=1}^N s_n \right) \ln(u^2 + q_0^2(\tau)), \quad (3.52)$$

где  $q_n(\tau)$  — некоторые функции времени, а  $s_n$  — постоянные. Последнее слагаемое в (3.52) добавлено для выполнения условия локализации возмущения:  $Z \rightarrow 0$  при  $u \rightarrow \pm\infty$ . Отметим, что если взять  $q_n \ll q_0$ , то влиянием этого члена на эволюцию поверхности можно пренебречь.

Подстановка (3.52) в (3.48) приводит к системе  $N$  обыкновенных дифференциальных уравнений на функции  $q_n(\tau)$ , решение которой имеет вид  $N$  трансцендентных уравнений:

$$q_n + \sum_{m=1}^N s_n \ln(q_n + q_m) = C_n - \tau. \quad (3.53)$$

Здесь  $C_n$ , где  $n = 1, 2, \dots, N$  — постоянные интегрирования. В этих выражениях не учитывалась временная эволюция  $q_0(\tau)$  — ее влияние здесь сводится к перенормировке констант  $C_n$ .

Рассмотрим простейший случай, когда  $N = 1$  и  $s_1 = \pm 1$ . Эволюция поверхности тогда,

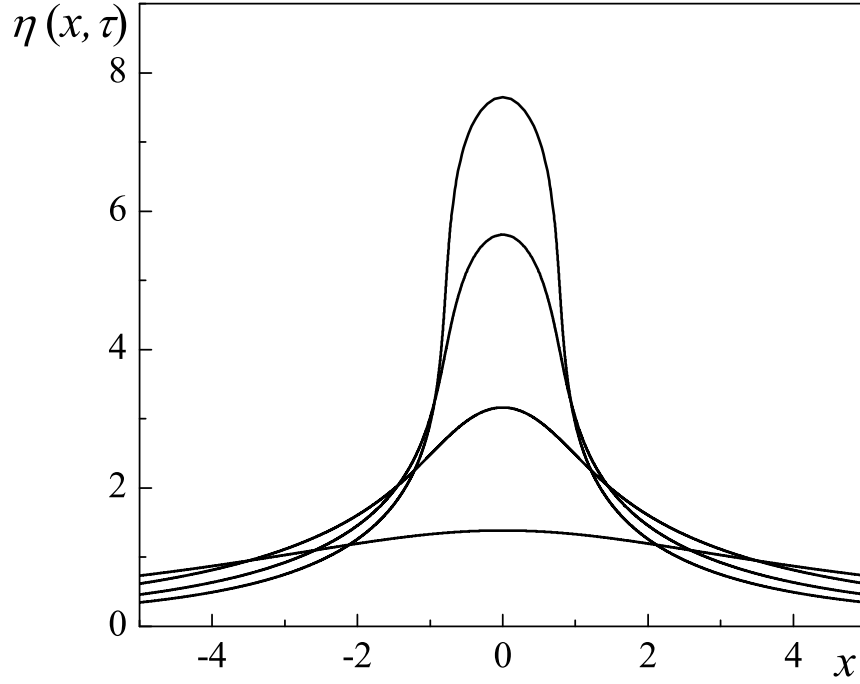


Рисунок 3.3: Эволюция пространственно локализованного возмущения для  $A = 1/2$ ,  $s_1 = +1$ ,  $q_1(0) = 5$  и  $q_0(0) = 20$ . Профиль поверхности раздела показан в последовательные моменты времени  $\tau = 0$ ,  $\tau = 6$ ,  $\tau = 9$  и  $\tau = 11$ .

в соответствии с (3.47), (3.52) и (3.53), задается параметрическими выражениями:

$$z = Z(u, \tau) = \mp \ln(\sqrt{u^2 + q_1^2(\tau)}) \pm \ln(\sqrt{u^2 + q_0^2}), \quad (3.54)$$

$$x = X(u, \tau) = Au \pm A \arctan(u/q_1(\tau)) \mp A \arctan(u/q_0), \quad (3.55)$$

$$q_1(\tau) \pm \ln q_1(\tau) = 1 + \tau_c - \tau \quad (3.56)$$

где постоянная  $\tau_c$  соответствует моменту времени, когда  $q_1 = 1$ .

При  $s_1 = +1$  выражения (3.54)–(3.56) описывают так называемое однопальцевое решение УЛР. Соответствующий ему профиль поверхности в последовательные моменты времени представлен на Рисунок 3.3. Для него, как следует из (3.54) и (3.56), на больших временах  $\tau$  справедливо:

$$\eta(0, \tau) \approx \tau,$$

то есть возмущение поверхности раздела прорастает в сторону более легкой жидкости с постоянной скоростью  $\eta_t = E_1(t)$ . Следует отметить, что при получении этой оценки полагалось, что  $q_0 \gg 1$ , т.е. вклад последних слагаемых в (3.54) и (3.55) считался относительно

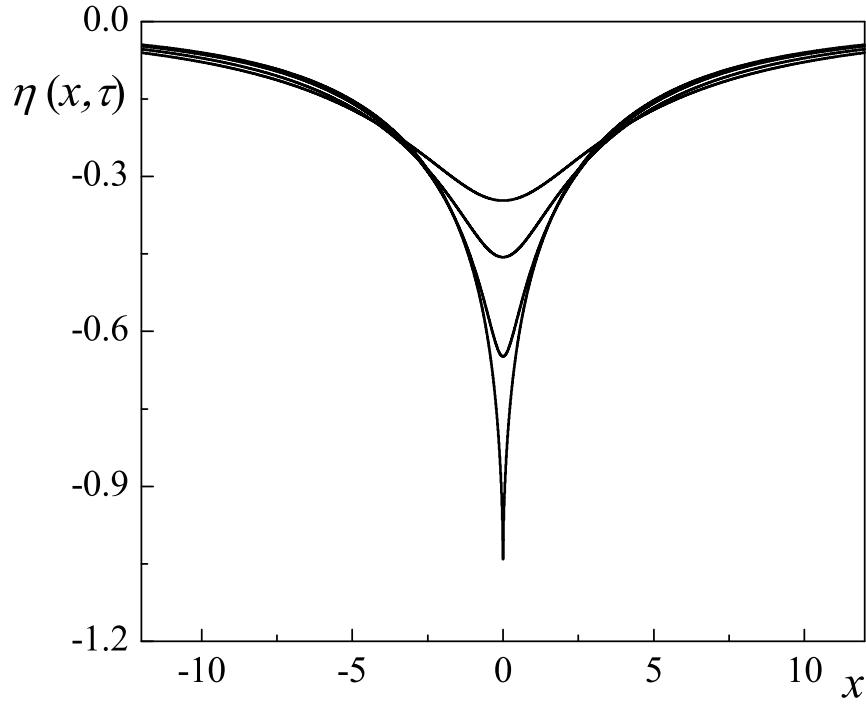


Рисунок 3.4: Эволюция пространственно локализованного возмущения для  $A = 1/2$ ,  $s_1 = -1/4$ ,  $q_1(0) = 5$  и  $q_0(0) = 20$ . Профиль поверхности раздела показан в последовательные моменты времени  $\tau = 0$ ,  $\tau = 2$ ,  $\tau = 3.5$  и  $\tau = \tau_c \approx 4.11$ .

малым.

В случае, если  $s_1 = -1$ , решение (3.54)–(3.56) существует лишь конечное время, и в момент времени  $\tau = \tau_c$  на поверхности раздела формируется особенность, аналогичная возникающей для периодического решения. Действительно, вблизи особенности профиль поверхности задается соотношением  $z - Z(0, \tau_c) \sim |x|^{3/2}$ , аналогичным (3.51). На Рисунке 3.4 представлена временная эволюция поверхности раздела для этой ситуации.

Напомним, что проиллюстрированные Рисунками 3.2, 3.3 и 3.4 решения уравнений движения являются приближенными (точными они становятся в пределе  $A \rightarrow 1$ ). Тем не менее, как нам представляется, они дают качественно верную картину развития электрогидродинамической неустойчивости поверхности раздела жидких диэлектриков.

Из данных примеров видно, что развитие неустойчивости приводит к формированию областей с высокой кривизной поверхности (формально бесконечной). В этих точках капиллярное давление, влияние которого не учитывалось, становится бесконечным за конечное время. Возникает вопрос, применим ли подход, основанный на редукции уравнений движения, для стадий формирования особенностей. Оценим электростатическое давление ( $P_E$ ) и

капиллярное давление ( $P_c$ ) в окрестности сингулярности. Получим:

$$P_E \sim \lambda_0^{3/2} g_0^{1/2} \rho_1 (t_c - t)^{-1}, \quad P_c \approx \sigma \eta_{xx} \sim \lambda_c^2 \lambda_0^{-1/2} g_0^{1/2} \rho_1 (t_c - t)^{-1},$$

где мы вернулись к размерным обозначениям (см. подробнее [63]). Видно, что при выполнении условия (3.12) капиллярные силы значительно меньше электростатических ( $P_c \ll P_E$ ) и, следовательно, ими можно пренебречь на стадии формирования острия.

### 3.7 Выводы к Главе 3

В настоящей главе мы рассмотрели нелинейную динамику развития неустойчивости поверхности раздела двух идеальных диэлектрических жидкостей в вертикальном электрическом поле с учетом влияния силы тяжести. К основным результатам можно отнести:

1. Выявлен особый режим течения жидкостей, для которого потенциалы электрического поля и скорости оказываются линейно зависимыми величинами. Это означает существование такой (в общем случае — неинерциальной) системы координат, в которой жидкости движутся по силовым линиям электрического поля. Условием реализации подобного режима является пропорциональность скорости изменения напряженности внешнего электрического поля и эффективной напряженности гравитационного поля. Рассмотрение подобного режима позволяет вдвое уменьшить число уравнений, описывающих эволюцию системы. При этом важно, что предлагаемый подход не ограничен условием малости углов наклона поверхности, а также не накладывает никаких ограничений на симметрию задачи — редукция осуществляется в рамках исходных (нелинейных) трехмерных уравнений движения.
2. Показано, что в предельном случае, когда отношение плотностей верхней и нижней жидкостей мало, редуцированные уравнения сводятся к известным уравнениям, описывающим процесс лапласовского роста. Для плоской симметрии задачи с использованием конформных переменных продемонстрировано, что рассматриваемый режим движения жидкостей устойчив по отношению к малым возмущениям. Это свидетельствует о том, что редуцированные уравнения не просто определяют некий специальный класс реше-

ний задачи, но и описывают асимптотическое поведение системы, то есть относятся к случаю общего положения.

3. Для конечного отношения плотностей жидкостей в рамках развиваемого подхода выведено эволюционное уравнение, описывающее динамику поверхности раздела с учетом квадратичных нелинейностей. Показано, что для плоской геометрии задачи оно может быть сведено к уравнению лапласовского роста, интегрируемость которого позволяет эффективно описать начальные (слабо-нелинейные) стадии развития электрогидродинамической неустойчивости границы.

Следует отметить, что для классической задачи о неустойчивости поверхности раздела двух жидкостей в поле тяжести (неустойчивости Релея-Тейлора) не известно аналогичных редукций. Возможность редукции уравнений движения и, в отдельных случаях, построения точных решений задачи при наличии электрического поля связана с тем обстоятельством, что потенциалы поля и скорости описываются сходными уравнениями, и введение в уравнения движения электростатического давления приводит их к более симметричному виду.

Изложенные в настоящей главе научные результаты опубликованы в работах [96–98, 114–116].

# Глава 4. Нелинейные волны на поверхности раздела жидкостей в горизонтальном электрическом поле

## 4.1 Введение

В настоящей главе будет исследовано влияние горизонтального электрического поля на поверхность раздела жидких диэлектриков при наличии тангенциального разрыва скоростей на границе, т.е. в ситуации, когда может реализоваться неустойчивость Кельвина-Гельмгольца. Известно, что на начальной стадии развития неустойчивости Кельвина-Гельмгольца происходит экспоненциальный рост амплитуды возмущения поверхности [117]. При появлении внешнего электрического поля, направленного касательно к невозмущенной границе раздела жидкостей, возникает электростатическое давление, которое оказывает стабилизирующее воздействие на поверхность раздела жидкостей.

Дисперсионное соотношение для линейной стадии развития неустойчивости, подавляемой внешним полем, имеет вид

$$(\omega + v_c k)^2 = (c_e^2 - c_k^2) k^2,$$

где  $\omega$  — частота,  $k$  - модуль волнового вектора,  $c_k$ ,  $c_e$  — постоянные ответственные за действие гидростатического и электростатического давлений, а  $v_c$  - скорость центра масс жидкостей:

$$c_k^2 = \rho_1 \rho_2 \left( \frac{V_1 - V_2}{\rho_1 + \rho_2} \right)^2, \quad c_e^2 = \frac{E^2 \varepsilon_0}{(\rho_1 + \rho_2)} \cdot \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2}{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}, \quad v_c = \frac{\rho_1 V_1 + \rho_2 V_2}{\rho_1 + \rho_2}.$$



Здесь  $\rho_{1,2}$  — плотности нижней и верхней жидкости, соответственно (индекс "1" будет соответствовать нижней жидкости, а индекс "2" — верхней),  $V_{1,2}$  — скорости жидкостей на бесконечном удалении от границы,  $E$  — напряженность внешнего электрического поля,  $\varepsilon_{1,2}$  — диэлектрические проницаемости жидкостей,  $\varepsilon_0$  — электрическая постоянная. При  $c_k^2 > c_e^2$  поверхность раздела жидкостей неустойчива. При  $c_k^2 = c_e^2$  неустойчивость Кельвина-Гельмгольца подавляется стабилизирующим влиянием электрического поля. В системе центра масс жидкостей ( $v_c = 0$ ) дисперсионное соотношение принимает простейший вид

$$\omega = 0,$$

что соответствует состоянию нейтрального равновесия. В терминах напряженности электрического поля эта ситуация соответствует тому, что

$$E^2 = E_c^2 = \left( \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \right) \left( \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{\varepsilon_0 (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2} \right) (V_1 - V_2)^2. \quad (4.1)$$

При  $E = E_c$  поведение системы будет полностью определяться эффектами нелинейности.

В работе [88] рассматривалась задача описания нелинейной эволюции свободной поверхности жидкости в отсутствие внешних сил. При наличии тангенциального разрыва скоростей (в отсутствие стабилизирующего поля) нелинейная динамика поверхности раздела исследовалась в [118, 119]. Авторам указанных работ, в частности, удалось показать, что возможен взрывной рост возмущений поверхности, и могут формироваться корневые особенности, для которых кривизна поверхности становится бесконечной за конечное время. Ключевой вопрос заключается в том, сохранится ли тенденция к формированию особенностей на границе при наличии электрического поля.

Глава построена следующим образом. В разд. 4.2 приводятся основные уравнения движения, описывающие эволюцию границы раздела диэлектрических жидкостей под действием горизонтального электрического поля и тангенциального разрыва поля скоростей на поверхности. В разд. 4.3, на основе гамильтонова формализма получена система интегро-дифференциальных уравнений, описывающая динамику слабо-нелинейных волн на границе жидкостей. В следующем разд. 4.4 исследованы волны на границе раздела жидкостей в условиях нейтрального равновесия. Получен широкий класс точных решений в виде перио-

дических и локализованных волн; показано, что данные решения не нарушают малоугловое приближение. Разд. 4.5 посвящен анализу полной системы нелинейных уравнений движения, в которых не используется каких-либо ограничений для формы поверхности. Продемонстрирована возможность реализации особого режима движения жидкостей, при котором потенциалы скорости и электрического поля являются линейно зависимыми функциями. В разд. 4.6 рассматривается динамика слабо-нелинейных волн в отсутствии разрыва скоростей на границе. Показано, что поверхностные волны могут распространяться с постоянной скоростью, пропорциональной напряженности внешнего поля. Распространение волн происходит без искажений вдоль направления электрического поля. Получено общее решение, описывающее взаимодействие встречных слабо-нелинейных волн формы в 3D-геометрии. В заключительном разделе содержатся выводы по главе.

## 4.2 Исходные уравнения

Рассмотрим динамику границы раздела двух несмешивающихся непроводящих жидкостей во внешнем горизонтальном электрическом поле. В невозмущенном состоянии поверхность раздела представляет собой плоскость  $z = 0$  (оси  $x$  и  $y$  прямоугольной системы координат лежат в этой плоскости, а ось  $z$  направлена по нормали к ней, см. Рисунок 4.1). Напряженность внешнего электрического поля направлена по оси  $x$ ; по абсолютному значе-

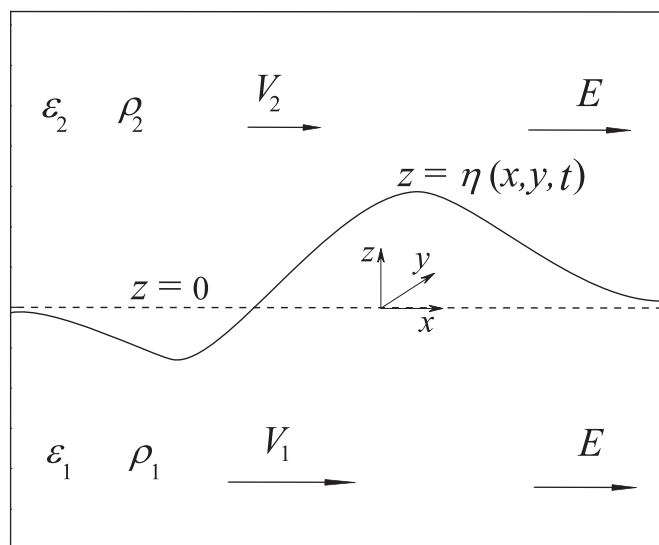


Рисунок 4.1: Схематически показана геометрия задачи.

нию она равна  $E$ . Положим, что отклонение поверхности раздела от плоскости  $z = 0$  задается функцией  $\eta(x, y, t)$ , т.е. уравнение  $z = \eta$  определяет профиль границы. Будем считать обе жидкости невязкими и несжимаемыми, а их течение – безвихревым (потенциальным). Потенциалы скорости  $\Phi_{1,2}$  и электрического поля  $\varphi_{1,2}$  обеих жидкостей удовлетворяют уравнениям Лапласа

$$\Delta\Phi_{1,2} = 0, \quad \Delta\varphi_{1,2} = 0. \quad (4.2)$$

На границе раздела должно выполняться условие равенства нормальных компонент скоростей верхней и нижней жидкостей

$$\partial_n\Phi_1 = \partial_n\Phi_2, \quad z = \eta(x, y, t), \quad (4.3)$$

где  $\partial_n$  – производная в направлении нормали к поверхности  $z = \eta$ . Для потенциалов электрического поля справедливы граничные условия

$$\varphi_1 = \varphi_2, \quad \varepsilon_1\partial_n\varphi_1 = \varepsilon_2\partial_n\varphi_2, \quad z = \eta(x, y, t). \quad (4.4)$$

Они соответствуют требованиям непрерывности тангенциальной компоненты вектора напряженности электрического поля и нормальной компоненты вектора электрической индукции на поверхности раздела (считаем, что свободные поверхностные заряды на границе отсутствуют). На бесконечном удалении от границы электрическое поле и поля скоростей жидкостей становятся однородными:

$$\Phi_{1,2} \rightarrow V_{1,2}x, \quad \varphi_{1,2} \rightarrow -Ex, \quad z \rightarrow \mp\infty.$$

Динамика поверхности раздела определяется кинематическим и динамическим граничными условиями:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} - (\nabla_\perp\eta \cdot \nabla_\perp\Phi_1). \quad z = \eta(x, y, t), \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \rho_1 \left( \frac{\partial\Phi_1}{\partial t} + \frac{(\nabla\Phi_1)^2}{2} \right) - \rho_2 \left( \frac{\partial\Phi_2}{\partial t} + \frac{(\nabla\Phi_2)^2}{2} \right) = \\ = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{2} (\nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2) + P_0, \end{aligned} \quad (4.6)$$

где  $\nabla_\perp$  – двумерный градиент в плоскости  $(x, y)$ , а  $P_0 = P_E + P_V$  – постоянная Бернулли.

Здесь также

$$P_E = -\varepsilon_0(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)E^2/2, \quad P_V = (\rho_1 V_1^2 - \rho_2 V_2^2)/2.$$

Уравнения движения представимы в гамильтоновой форме [5, 88]. Гамильтониан системы  $H$ , совпадающий с полной энергией системы, имеет вид

$$\begin{aligned} H = & \rho_1 \int_{z \leq \eta} \frac{(\nabla \Phi_1)^2 - V_1^2}{2} d^3 r + \rho_2 \int_{z \geq \eta} \frac{(\nabla \Phi_2)^2 - V_2^2}{2} d^3 r \\ & - \varepsilon_0 \varepsilon_1 \int_{z \leq \eta} \frac{(\nabla \varphi_1)^2 - E^2}{2} d^3 r - \varepsilon_0 \varepsilon_2 \int_{z \geq \eta} \frac{(\nabla \varphi_2)^2 - E^2}{2} d^3 r. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Для удобства введем возмущения потенциалов скорости жидкостей  $\tilde{\Phi}_{1,2}$  и электрического поля  $\tilde{\varphi}_{1,2}$ :

$$\Phi_{1,2} = \tilde{\Phi}_{1,2} + V_{1,2}x, \quad \varphi_{1,2} = \tilde{\varphi}_{1,2} - Ex, \quad (4.8)$$

(вне возмущенной ситуации, когда граница является плоской  $\tilde{\Phi}_{1,2} = \tilde{\varphi}_{1,2} = 0$ ).

Уравнения движения в канонической форме имеют вид:

$$\psi_t = -\frac{\delta H}{\delta \eta}, \quad \eta_t = \frac{\delta H}{\delta \psi}, \quad (4.9)$$

где  $\psi$  — обобщенный импульс, определяемый как

$$\psi(x, y, t) = \rho_1 \tilde{\Phi}_1 \Big|_{z=\eta} - \rho_2 \tilde{\Phi}_2 \Big|_{z=\eta}.$$

Перейдем к безразмерным переменным (здесь и далее в обозначениях возмущенных потенциалов знаки "тильды" опущены):

$$\begin{aligned} \Phi_{1,2} & \rightarrow \frac{\Phi_{1,2}}{V\lambda}, \quad \varphi_{1,2} \rightarrow \frac{\varphi_{1,2}}{V\lambda} \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1}{\rho_1}}, \quad V_{1,2} \rightarrow \frac{V_{1,2}}{V}, \\ E & \rightarrow \frac{E}{V} \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1}{\rho_1}}, \quad \mathbf{r} \rightarrow \frac{\mathbf{r}}{\lambda}, \quad t \rightarrow t \frac{V}{\lambda}, \quad \psi \rightarrow \frac{\psi}{V\lambda\rho_1}, \end{aligned}$$

где  $V, \lambda$  — характерная скорость и длина волны, соответственно.

Применяя первую теорему Грина можно выразить гамильтониан в форме поверхност-

ного интеграла

$$\begin{aligned}
H = & \frac{1}{2} \int \psi (\Phi_{1z} - \nabla_{\perp} \Phi_1 \nabla_{\perp} \eta)|_{z=\eta} dx dy - \frac{E(1 - \varepsilon_2/\varepsilon_1)}{2} \int \eta_x \varphi_1|_{z=\eta} dx dy - \\
& - \frac{1}{2} \int \eta_x \left[ (V_1 + V_2)\psi + (V_1 - V_2) \Phi_1|_{z=\eta} \right] dx dy. \tag{4.10}
\end{aligned}$$

В совокупности, приведенные соотношения представляют собой замкнутую систему уравнений, описывающих движение диэлектрических жидкостей с поверхностью раздела под действием электростатических сил, обусловленных наличием внешнего горизонтального электрического поля и тангенциального разрыва скоростей на границе. Влияние капиллярных и гравитационных сил здесь не учитывается, что соответствует пределу сильного поля (см. Главу 2).

### 4.3 Слабо-нелинейные волны на поверхности

Рассмотрим динамику поверхности раздела в приближении малости углов наклона границы,

$$|\nabla_{\perp} \eta| \sim \alpha \ll 1.$$

Чтобы получить уравнения движения поверхности необходимо выразить гамильтониан системы (4.10) через канонические переменные  $\eta$  и  $\psi$ . Разложим подынтегральное выражение в гамильтониане (4.10) в ряд по степеням  $\eta$  и  $\psi$ . Для этого необходимо выразить входящие в (4.10) функции через канонические переменные. В целом, данная процедура аналогична проведенной в разд. 2.3.

Для потенциалов  $\varphi_1$  и  $\Phi_1$  на поверхности раздела получим:

$$\begin{aligned}
\Phi_1|_{z=\eta} = & (V_1 - V_2) \left( \frac{1 - A}{2} \right) \left( \hat{k}^{-1} \eta_x - A \left[ \eta \eta_x + \hat{k}^{-1} \nabla_{\perp} (\eta \nabla_{\perp} \hat{k}^{-1} \eta_x) \right] \right) + \\
& + \left( \frac{1 + A}{2} \right) \left( \psi + (1 - A) \left[ \eta \hat{k} \psi + \hat{k}^{-1} \nabla_{\perp} (\eta \nabla_{\perp} \psi) \right] \right) + O(\alpha^3), \\
\varphi_1|_{z=\eta} = & -A_E E \left( \hat{k}^{-1} \eta_x + A_E \left[ \eta \eta_x + \hat{k}^{-1} \nabla_{\perp} (\eta \nabla_{\perp} \hat{k}^{-1} \eta_x) \right] \right) + O(\alpha^3),
\end{aligned}$$

где  $A = (\rho_1 - \rho_2)/(\rho_1 + \rho_2)$  – число Атвуда,  $A_E = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)/(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$  – его аналог для диэлектрических проницаемостей.

В безразмерных обозначениях и с точностью до кубических слагаемых в подынтегральной части гамильтониан системы принимает вид:

$$\begin{aligned}
H = & -V_c \int \psi \eta_x dx dy + \left( \frac{1+A}{4} \right) \int \left( \psi \hat{k} \psi - A \eta \left[ (\hat{k} \psi)^2 - (\nabla_{\perp} \psi)^2 \right] \right) dx dy - \\
& - (V_1 - V_2)^2 \left( \frac{1-A}{4} \right) \int \eta_x \left( \hat{k}^{-1} \eta_x - A \left[ \eta \eta_x + \hat{k}^{-1} \nabla_{\perp} (\eta \nabla_{\perp} \hat{k}^{-1} \eta_x) \right] \right) dx dy + \\
& + E^2 \left( \frac{A_E^2}{1+A_E} \right) \int \eta_x \left( \hat{k}^{-1} \eta_x + A_E \left[ \eta \eta_x + \hat{k}^{-1} \nabla_{\perp} (\eta \nabla_{\perp} \hat{k}^{-1} \eta_x) \right] \right) dx dy - \\
& - (V_1 - V_2) \left( \frac{1-A^2}{2} \right) \int \psi \left[ \hat{k} (\eta \eta_x) + \nabla_{\perp} (\eta \nabla_{\perp} \hat{k}^{-1} \eta_x) \right] dx dy. \tag{4.11}
\end{aligned}$$

Здесь  $V_c = (V_1(1+A) + V_2(1-A))/2$  – безразмерная скорость центра масс жидкостей. Без потери общности можно положить ее равной нулю, что соответствует переходу в систему центра масс жидкостей.

Взяв вариационные производные, мы получаем уравнения движения:

$$\begin{aligned}
\eta_t - \left( \frac{1+A}{2} \right) \hat{k} \psi = & - \frac{A(1+A)}{2} \left( \hat{k} (\eta \hat{k} \psi) + \nabla_{\perp} (\eta \nabla_{\perp} \psi) \right) - \\
& - (V_1 - V_2) \left( \frac{1-A^2}{2} \right) \left( \hat{k} (\eta \eta_x) + \nabla_{\perp} (\eta \nabla_{\perp} \hat{k}^{-1} \eta_x) \right), \tag{4.12}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\psi_t - \left( \frac{2A_E^2 E^2}{1+A_E} - \frac{(1-A)(V_1 - V_2)^2}{2} \right) \hat{k}^{-1} \eta_{xx} = & \frac{A(1+A)}{4} \left( (\hat{k} \psi)^2 - (\psi_x)^2 \right) + \\
& + (V_1 - V_2) \left( \frac{1-A^2}{2} \right) \left[ \eta_x \hat{k} \psi + \nabla_{\perp} \psi \cdot \nabla_{\perp} \hat{k}^{-1} \eta_x - \partial_x \left( \eta \hat{k} \psi + \nabla_{\perp} \hat{k}^{-1} (\eta \nabla_{\perp} \psi) \right) \right] + \\
& + \left( \frac{2A_E^3 E^2}{1+A_E} + \frac{A(1-A)(V_1 - V_2)^2}{2} \right) \left[ \frac{1}{2} \left( \eta_x^2 + (\nabla_{\perp} \hat{k}^{-1} \eta_x)^2 \right) + \right. \\
& \left. + \eta \eta_{xx} - \hat{k}^{-1} \partial_x \left( \eta \hat{k} \eta_x - \nabla_{\perp} \eta \cdot \nabla_{\perp} \hat{k}^{-1} \eta_x \right) \right]. \tag{4.13}
\end{aligned}$$

Как видно, данная система уравнений представляет собой достаточно сложную систему нелинейных интегро-дифференциальных уравнений. Построение общего решения данной системы затруднительно, поэтому мы рассмотрим ряд частных случаев, в которых система упрощается и, как следствие, может быть эффективно исследована аналитически.

## 4.4 Нелинейные волны в режиме нейтральной устойчивости

Первый из частных случаев, при котором уравнения (4.12) и (4.13) существенно упрощаются соответствует ситуации, когда неустойчивость Кельвина-Гельмгольца полностью стабилизируется внешним полем, то есть при

$$E^2 = E_c^2 = (V_1 - V_2)^2 \frac{(1 - A)(1 + A_E)}{4A_E^2}.$$

Данное соотношение представляет собой условие (4.1), переписанное через  $A$  и  $A_E$ . При выполнении этого условия в левой части уравнения (4.13) исчезает второе слагаемое. Даже в этом случае система уравнений (4.12)-(4.13) остается очень сложной для анализа. Тем не менее, дальнейший прогресс в исследовании задачи может быть достигнут если положить  $\psi \equiv 0$ , и  $A_E = -A$ . При выполнении указанных условий система (4.12)-(4.13) сведется к единственному уравнению

$$\eta_t = -\frac{1}{2}(V_1 - V_2)(1 - A^2) \left( \hat{k}(\eta\eta_x) + \nabla_{\perp}(\eta\nabla_{\perp}\hat{k}^{-1}\eta_x) \right). \quad (4.14)$$

Оказывается, что в случае плоской симметрии задачи (нет зависимости от переменной  $y$ ) это уравнение допускает широкий класс точных решений в виде периодических, либо локализованных волн. Действительно, в условиях плоской симметрии оператор  $\hat{k}$  можно представить в виде  $\hat{k} = -\hat{H}\partial_x$ , где  $\hat{H}$  — преобразование Гильберта. Тогда уравнение (4.14) примет вид

$$\eta_t = \frac{1}{2}(V_1 - V_2)(1 - A^2) \left( \hat{H}(\eta\eta_x)_x - (\eta\hat{H}\eta_x)_x \right). \quad (4.15)$$

Данное уравнение можно переписать в более компактной форме при использовании следующего свойства оператора Гильберта  $\hat{H}\phi^{\pm} = \pm i\phi^{\pm}$ , где  $\phi^+$  — функция, аналитическая в верхней комплексной полуплоскости плоскости переменной  $x$  и  $\phi^-$  — функция, аналитическая в нижней полуплоскости. Для удобства дальнейшего анализа введем вспомогательную переменную времени

$$\tau = t(V_1 - V_2)(1 - A^2)/2.$$

В итоге уравнение (4.15) примет компактный вид

$$\eta_\tau^+ = 2i\hat{P}^+(\eta^+\eta_x^-)_x, \quad (4.16)$$

где  $\hat{P}^+ = (1 - i\hat{H})/2$  – оператор-проектор, действие которого на произвольную комплексную функцию определяется как  $\phi^+ = \hat{P}^+\phi$ .

Покажем, что уравнение (4.16) допускает широкий класс точных решений, которые описывают динамику периодических возмущений границы. Будем искать решение в виде суперпозиции конечного числа плоских волн

$$\eta^+(\tau, x) = \sum_{n=1}^N q_n(\tau) \exp(inx),$$

где  $q_n$  – комплексные амплитуды соответствующих гармоник. Подставляя данное выражение в уравнение (4.16), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений на амплитуды гармоник:

$$\frac{dq_n}{d\tau} = -2i \sum_{m=1}^{N-n} m \bar{q}_m q_{n+m}.$$

При  $N = 1$  решением является  $q_1 = \text{const}$ , оно соответствует синусоидальной волне, движущейся со скоростей центра масс. В общем случае, при  $N > 1$ , данная система описывает взаимодействие различных гармоник возмущений границы.

Значительный интерес представляет описание взаимодействия системы локализованных волн на границе раздела жидкостей. Будем искать решение в виде:

$$\eta^+(x, \tau) = \sum_{n=1}^N \frac{iS_n/2}{x + p_n(\tau)},$$

где  $p_n(\tau) = -(x_n + iy_n)$  – координаты особых точек (полюсов) на комплексной плоскости,  $S_n$  – вещественные постоянные. После подстановки данного выражения в уравнение (4.16), получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений для комплексных координат полюсов

$$\frac{dp_n}{d\tau} = \sum_{j=1}^N \frac{S_j}{(p_n - \bar{p}_j)^2}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (4.17)$$

В первую очередь рассмотрим эволюцию уединенного возмущения ( $N = 1$ ). Координаты



полюса определяются уравнениями

$$y_1(\tau) = \text{const} = y_0, \quad x_1(\tau) = \left( \frac{S_1}{4y_0^2} \right) \tau + x_0,$$

где  $y_0, x_0$  – определяют положение полюса в начальный момент времени. Как видно из данных соотношений нелинейная уединенная волна распространяется в направлении внешнего электрического поля при отрицательном  $S_1$  и против направления поля при положительном  $S_1$ . При этом движение происходит без искажения формы и с постоянной скоростью. Величина скорости обратно пропорциональна квадрату полуширины волны ( $y_0$ ), и прямо пропорциональна площади ( $S_1$ ), охватываемой возмущением. Возникает вопрос, как будут взаимодействовать подобные солитоноподобные возмущения? Оказывается, что пара таких волн ( $N = 2$ ) может образовывать структурно устойчивый пакет волн или *бризер*. Запишем систему (4.17) на координаты двух полюсов:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{d\tau} &= \frac{S_1}{4y_1^2} - \frac{S_2((x_1 - x_2)^2 - (y_1 + y_2)^2)}{((x_1 - x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2)^2}, \\ \frac{dy_1}{d\tau} &= \frac{2S_2(x_1 - x_2)(y_1 + y_2)}{((x_1 - x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2)^2}, \\ \frac{dx_2}{d\tau} &= \frac{S_2}{4y_2^2} - \frac{S_1((x_1 - x_2)^2 - (y_1 + y_2)^2)}{((x_1 - x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2)^2}, \\ \frac{dy_2}{d\tau} &= -\frac{2S_1(x_1 - x_2)(y_1 + y_2)}{((x_1 - x_2)^2 + (y_1 + y_2)^2)^2}. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Можно заметить, что интегралом движения данной системы является

$$S_1 y_1(\tau) + S_2 y_2(\tau) = \text{const}.$$

Система (4.18) несмотря на ее громоздкость может быть исследована аналитически для важного частного случая  $S_1 = S_2 = S$  и интегралом движения будет  $y_1 + y_2 = I$ .

Введем новые переменные — расстояния между полюсами:

$$y' = y_1 - y_2, \quad x' = x_1 - x_2.$$

Учитывая, что  $y_1 = (I + y')/2$  и  $y_2 = (I - y')/2$ , из (4.18) получим систему уравнений,

описывающую динамику  $x'$  и  $y'$ :

$$\frac{dx'}{d\tau} = -\frac{4ISy'}{(I^2 - (y')^2)^2}, \quad \frac{dy'}{d\tau} = \frac{4ISx'}{(I^2 + (x')^2)^2}. \quad (4.19)$$

Нетрудно заметить, что данные уравнения можно представить в гамильтоновой форме:

$$\frac{dx'}{d\tau} = \frac{\partial H'(y', x')}{\partial y'}, \quad \frac{dy'}{d\tau} = -\frac{\partial H'(y', x')}{\partial x'},$$

где  $H'(y', x')$  – гамильтониан системы, задаваемый выражением

$$H'(y', x') = 2IS \left( \frac{1}{I^2 + (x')^2} - \frac{1}{I^2 - (y')^2} \right).$$

Рассмотрим траекторию полюсов  $y' = y'(x')$  в фазовом пространстве. Из (4.19) находим уравнение, описывающее связь между расстояниями  $x'$  и  $y'$ :

$$\frac{dx'}{dy'} = -\frac{y' (I^2 + (x')^2)^2}{x' (I^2 - (y')^2)^2}.$$

Его решением является кривая четвертого порядка

$$I^4 + (I^2 - C^{-2})(x')^2 - (I^2 + C^{-2})(y')^2 - (x')^2(y')^2 = 0, \quad (4.20)$$

где  $C$  – постоянная интегрирования, определяемая из начальных условий. На Рисунке 4.2 приведен фазовый портрет для различных начальных условий. Финитные траектории соответствуют режиму, при котором локализованные волн объединяются в согласованно движущуюся пару, образуя бризер. Инфинитные траектории на Рисунке 4.2 соответствуют режиму, когда одна волна обгоняет другую. Пунктирной линией отмечена сепаратриса  $C = I$ , разделяющая эти режимы.

При небольших расстояниях между уединенными полюсами,  $(y')^2 + (x')^2 \ll I^2$ , система представляют собой линейный гармонический осциллятор; в основном порядке разложения по малым  $x'$  и  $y'$  для гамильтониана получим

$$H' = -\frac{2S}{I^3} ((y')^2 + (x')^2) + O(y'^3).$$

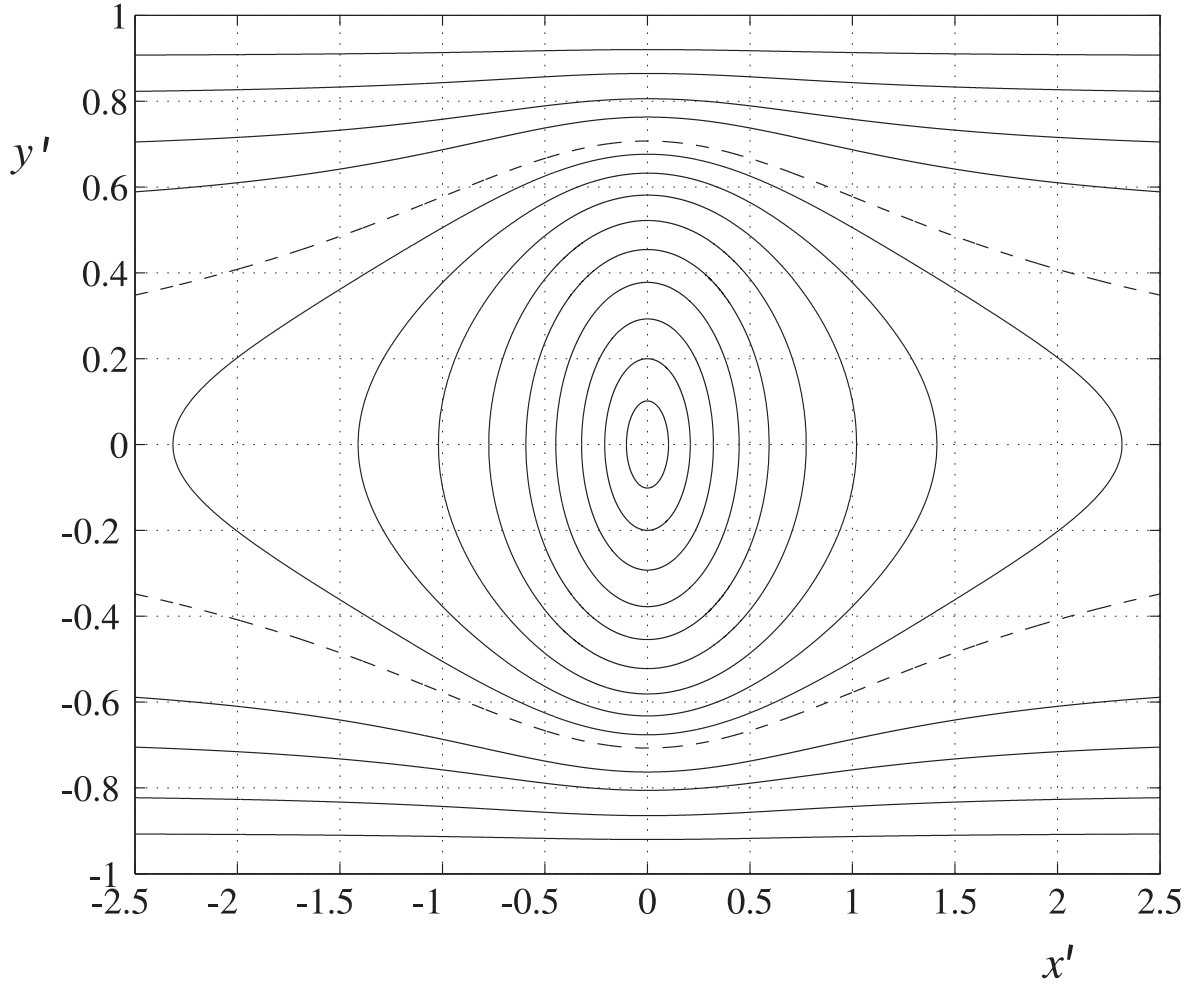


Рисунок 4.2: Фазовый портрет системы двух полюсов  $S = 1$  и  $I = 1$  для различных значений параметра  $C$  ( $C_1 = 0.102$ ,  $C_2 = 0.204$ ,  $C_3 = 0.306$ ,  $C_4 = 0.408$ ,  $C_5 = 0.51$ ,  $C_6 = 0.612$ ,  $C_7 = 0.714$ ,  $C_8 = 0.816$ ,  $C_9 = 0.918$ ,  $C_{10} = 1.00$ ,  $C_{11} = 1.18$ ,  $C_{12} = 1.36$ ,  $C_{13} = 1.72$ ,  $C_{14} = 2.35$ ).

При увеличении расстояния между полюсами колебания перестают быть гармоническими и приобретают сложный вид. Для наглядности на Рисунке 4.3 изображена эволюция границы раздела  $\eta(\tau, x)$ . Рисунок получен численным решением системы (4.18) методом Рунге-Кутты четвертого порядка.

Рассмотрим теперь случай взаимодействия волн с амплитудами различных знаков (в системе центра масс они движутся в противоположных направлениях)  $S_1 = -S_2$ . Отметим, что пара таких волн не может образовать бризер. Рассмотрим взаимодействие встречных волн, для которых  $y_1 = y_2 = y''$ ,  $x_1 = -x_2 = x''$ . Тогда систему (4.18) можно представить в виде:

$$\frac{dx''}{d\tau} = \frac{S_1}{4(y'')^2} + \frac{S_1((x'')^2 - (y'')^2)}{4((x'')^2 + (y'')^2)^2},$$

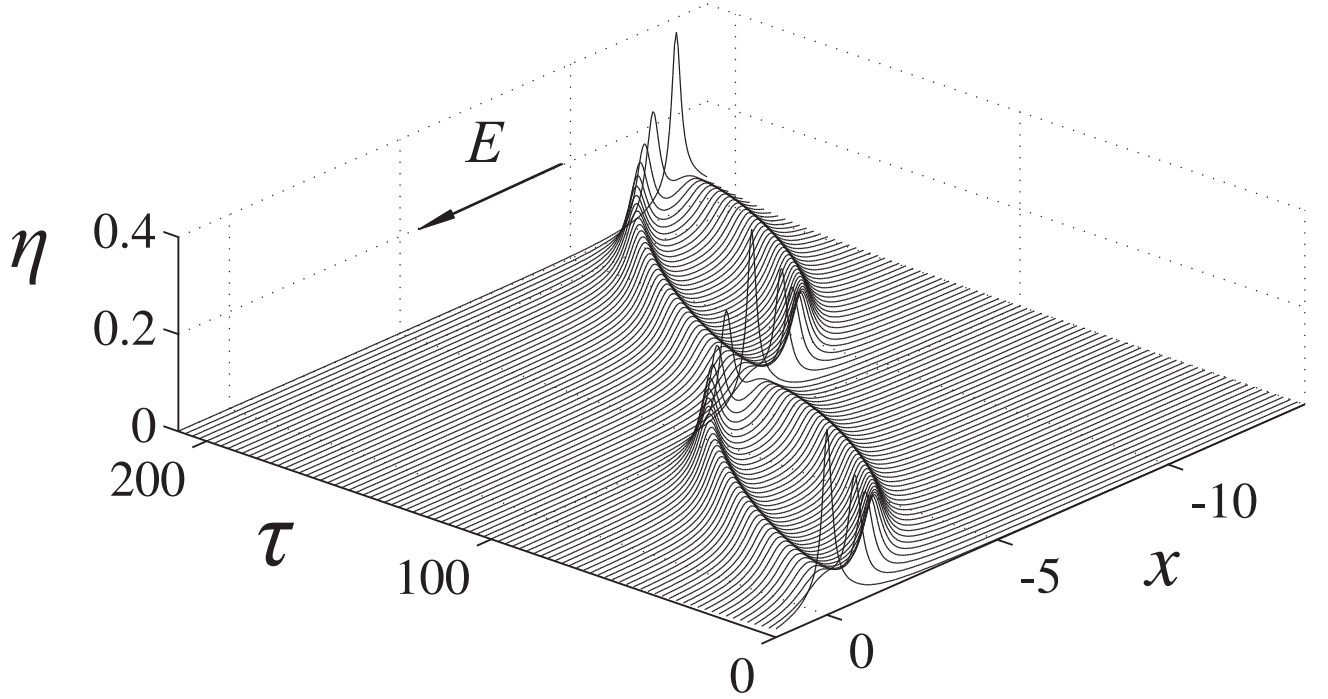


Рисунок 4.3: Движение пары взаимодействующих волн для начальных условий:  $\tau = 0$ ,  $S = 0.05$ ,  $x_1 = x_2 = 0$ ,  $y_1 = 0.845$ ,  $y_2 = 0.155$ .

$$\frac{dy''}{d\tau} = -\frac{S_1}{2} \frac{x''y''}{((x'')^2 + (y'')^2)^2}. \quad (4.21)$$

При больших расстояниях  $x''$  волны движутся практически без искажений. При уменьшении расстояния между полюсами усиливается взаимодействие. Рассмотрим взаимодействие волн в моменты времени близкие к их "столкновению", то есть при  $|x''| \ll 1$ . Раскладывая выражения в правой части системы (4.21) в ряд с точностью до  $(x'')^3$ , находим

$$\frac{dx''}{d\tau} = \frac{3S_1}{4} \left( \frac{x''}{(y'')^2} \right)^2,$$

$$\frac{dy''}{d\tau} = -\frac{S_1}{2} \frac{x''}{(y'')^3}.$$

Отсюда получаем дифференциальное уравнение, описывающее связь между  $x''$  и  $y''$

$$\frac{dx''}{d\tau} = -\frac{3x''}{2y''},$$

решением которого является  $x'' = C'(y'')^{-3/2}$ , где  $C'$  — постоянная интегрирования. Из данной зависимости видно, что при стремлении  $x''$  к нулю, полуширина  $y''$  стремится к бесконечности. Это означает, что амплитуда возмущения поверхности стремится к нулю. Учитывая, что

скорости полюсов также убывают при сближении, как это видно из уравнений (4.21), можно заключить, что система стремится к тривиальной равновесной конфигурации, а именно,  $\eta \rightarrow 0$ , при  $\tau \rightarrow \infty$ . Таким образом, равные по амплитуде, но противоположно направленные возмущения взаимно поглощают друг друга при столкновении. Однако такой ситуации не возникнет, если начальные амплитуды волн различаются. Так, на Рисунке 4.4 представлены траектории полюсов с различными начальными координатами в комплексной плоскости  $x$ , полученные в результате численного интегрирования системы (4.18).

Пунктирной линией показано движение полюса с отрицательным значением параметра  $S_2 < 0$  (движение слева направо), а сплошной - движение полюса с положительным  $S_1 > 0$  (движение справа налево). Из данного графика видно, что после столкновения волны продолжают движение, восстанавливая при этом свою начальную форму. Сам же процесс взаимодействия имеет достаточно сложный характер.

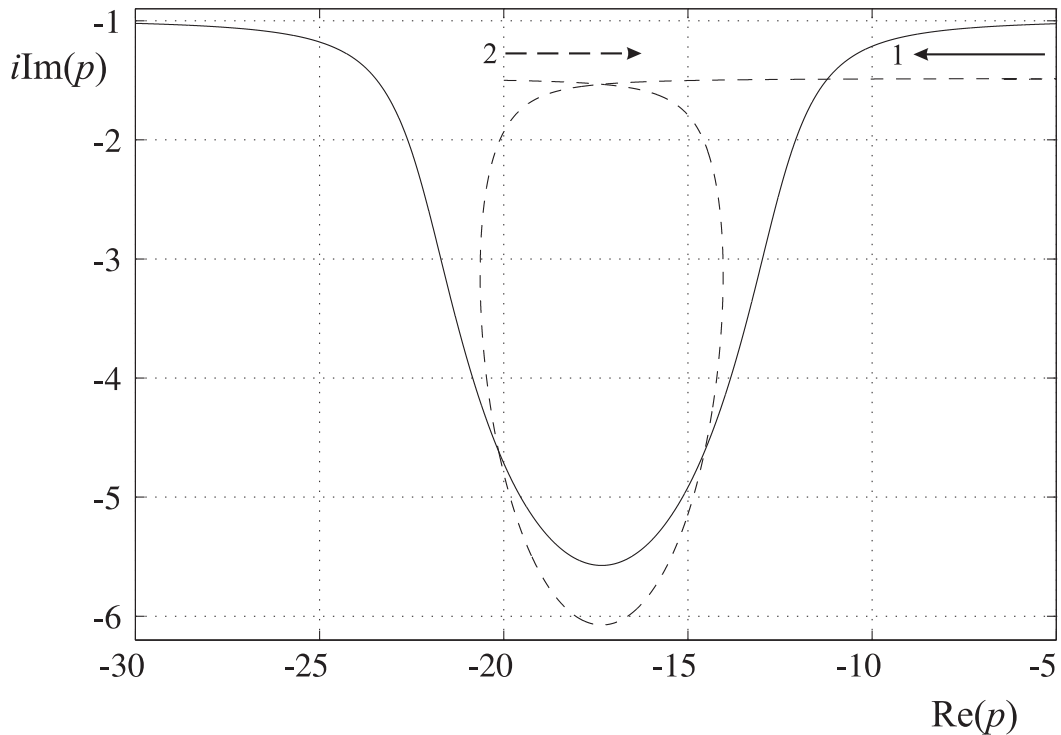


Рисунок 4.4: Траектории движения полюсов  $S_1 = -S_2 = 0.1$  с начальными условиями  $p_1 = -i$ ,  $p_2 = -20 - 3/2i$  при  $\tau = 0$ ; сплошная линия соответствует движению полюса с индексом "1", пунктирная — с индексом "2".

В общем случае построить аналитическое решение системы уравнений (4.17) для произвольного числа полюсов не удастся. При добавлении каждого дополнительного полюса их взаимодействие значительно усложняется. Динамика взаимодействия волн при больших  $N$

может оказаться хаотической.

## 4.5 Редукция уравнений движения

Предыдущий раздел был посвящен анализу слабо-нелинейной динамики поверхности раздела в условиях нейтрального равновесия, то есть в ситуации, когда гидростатическое давление на границе раздела жидкостей полностью компенсировалось электростатическим. Удалось найти точные решения уравнений движения жидкостей для которых справедливы условия,

$$A_E = -A, \quad \psi = 0. \quad (4.22)$$

Для возмущенных потенциалов скорости жидкостей второе условие в (4.22) выражается в виде следующего граничного условия на поверхности раздела:

$$\Phi_1 - \rho\Phi_2 = 0, \quad z = \eta(x, y, t),$$

где мы ввели обозначение  $\rho = \rho_2/\rho_1$ . Покажем, что это выражение эквивалентно условиям пропорциональности возмущенных потенциалов скорости и электрического поля:

$$\varphi_{1,2}(x, y, z, t) \equiv a_{1,2}\Phi_{1,2}(x, y, z, t), \quad (4.23)$$

где  $a_{1,2}$  - некоторые безразмерные постоянные.

Запишем граничные условия (4.4) и (4.3) для возмущенных потенциалов (4.8):

$$\varphi_1 - \varphi_2 = 0, \quad (4.24)$$

$$\partial_n \varphi_1 - \varepsilon \partial_n \varphi_2 = \frac{(\varepsilon - 1)E\eta_x}{\sqrt{1 + (\nabla_{\perp} \eta)^2}}, \quad z = \eta(x, y, t), \quad (4.25)$$

$$\partial_n \Phi_1 - \partial_n \Phi_2 = \frac{(V_1 - V_2)\eta_x}{\sqrt{1 + (\nabla_{\perp} \eta)^2}}, \quad z = \eta(x, y, t), \quad (4.26)$$

где мы также ввели обозначение  $\varepsilon = \varepsilon_2/\varepsilon_1$ . Данные соотношения следует дополнить динами-

ческим и кинематическим граничными условиями

$$\begin{aligned} \Phi_{1t} - \rho\Phi_{2t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi_1)^2 - \frac{\rho}{2}(\nabla\Phi_2)^2 + V_1\Phi_{1x} - \rho V_2\Phi_{2x} = \\ = \frac{(1-\varepsilon)}{2}(\nabla\varphi_1 \cdot \nabla\varphi_2 - E(\varphi_{1x} + \varphi_{2x})), \end{aligned} \quad (4.27)$$

$$\eta_t = -V_1\eta_x + \Phi_{1z} - (\nabla_{\perp}\Phi_1 \cdot \nabla_{\perp}\eta). \quad (4.28)$$

При подстановке выражения (4.23) в граничное условие (4.25) мы получим условия совместности (4.25) и (4.26):

$$E = -\frac{a_1(V_1 - V_2)}{1 - \varepsilon}, \quad a_1 = \varepsilon a_2, \quad (4.29)$$

а также дополнительное условие для потенциалов скорости из (4.24):

$$\Phi_1 - \varepsilon^{-1}\Phi_2 = 0, \quad z = \eta(x, y, t). \quad (4.30)$$

Теперь нам нужно проверить совместность динамического (4.27) и кинематического (4.28) условий с выражением (4.23). Перепишем кинематическое граничное условие таким образом, чтобы оно не содержало функцию  $\eta(x, y, t)$  в явном виде. Это можно сделать при помощи выражений

$$\eta_t(\Phi_{1z} - \varepsilon^{-1}\Phi_{2z}) = -(\Phi_{1t} - \varepsilon^{-1}\Phi_{2t}), \quad z = \eta(x, y, t),$$

$$\nabla_{\perp}\eta(\Phi_{1z} - \varepsilon^{-1}\Phi_{2z}) = -(\nabla_{\perp}\Phi_1 - \varepsilon^{-1}\nabla_{\perp}\Phi_2), \quad z = \eta(x, y, t),$$

получаемых при помощи дифференцирования условия (4.30). В результате кинематическое граничное условие (4.28) примет вид

$$\Phi_{1t} - \varepsilon^{-1}\Phi_{2t} + (\nabla\Phi_1)^2 - \varepsilon^{-1}(\nabla\Phi_2)^2 + V_1(\Phi_{1x} - \Phi_{2x}) = 0. \quad (4.31)$$

Динамическое граничное условие после подстановки (4.23) запишется как

$$\begin{aligned} \Phi_{1t} - \rho\Phi_{2t} + \frac{1}{2}(\nabla\Phi_1)^2 - \frac{\rho}{2}(\nabla\Phi_2)^2 + V_1\Phi_{1x} - \rho V_2\Phi_{2x} = \\ = a_1^2 \left( \frac{1}{2}(\varepsilon^{-1} - 1)(\nabla\Phi_1 \cdot \nabla\Phi_2) + \frac{(V_1 - V_2)}{2}(\Phi_{1x} + \Phi_{2x}) \right), \end{aligned}$$

где мы учли условия (4.29). Для того, чтобы показать совместность данного соотношения с

условием (4.31), перепишем его в более удобном виде при помощи следующего соотношения:

$$(\nabla\Phi_1)^2 + \varepsilon^{-1}(\nabla\Phi_2)^2 - (1 + \varepsilon^{-1})(\nabla\Phi_1 \cdot \nabla\Phi_2) + (V_1 - V_2)(\Phi_{1x} - \varepsilon^{-1}\Phi_{2x}) = 0,$$

полученного из условий (4.26) и (4.30). В итоге динамическое граничное условие примет вид

$$\begin{aligned} & \Phi_{1t} - \rho\Phi_{2t} + \frac{1}{2}(1 + a_1^2)(\nabla\Phi_1)^2 - \frac{1}{2}(\rho - \varepsilon^{-1}a_1^2)(\nabla\Phi_2)^2 - \\ & - \varepsilon^{-1}a_1^2(\nabla\Phi_1 \cdot \nabla\Phi_2) + V_1\Phi_{1x} - (\rho V_2 + \varepsilon^{-1}a_1^2(V_1 - V_2))\Phi_{2x} = 0. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Сравнивая (4.31) и (4.32) можно обнаружить, что они совпадают при выполнении условий

$$\rho = \varepsilon^{-1}, \quad a_1^2 = 1. \quad (4.33)$$

отметим, что условие  $\rho = \varepsilon^{-1}$  эквивалентно условию  $A = -A_E$ , а тот факт, что параметр  $a_1$  может иметь положительное и отрицательные значения соответствует инвариантности задачи относительно замены  $E \rightarrow -E$ .

Итак, в ситуации нейтрального равновесия, когда электростатическое давление полностью стабилизирует неустойчивость Кельвина-Гельмгольца может реализовываться режим движения жидкостей, при котором возмущения потенциалов скорости и электрического поля пропорциональны. Соответствующие этому режиму редуцированные уравнения движения для невозмущенных потенциалов имеют вид:

$$\Delta\Phi_1 = 0, \quad \Delta\Phi_2 = 0,$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\partial\Phi_1}{\partial z} - (\nabla_{\perp}\eta \cdot \nabla_{\perp}\Phi_1), \quad z = \eta(x, y, t),$$

$$\frac{\partial\Phi_1}{\partial n} = \frac{\partial\Phi_2}{\partial n}, \quad z = \eta(x, y, t),$$

$$\Phi_1 - \rho\Phi_2 = (V_1 - \rho V_2)x, \quad z = \eta(x, y, t),$$

$$\Phi_1 \rightarrow V_1x, \quad \Phi_2 \rightarrow V_2x, \quad z \rightarrow \pm\infty,$$

$$\Phi_1 = a_1(\varphi_1 + Ex) + V_1x, \quad \Phi_2 = a_1\rho(\varphi_2 + Ex) + V_2x.$$

Таким образом, в данном разделе нам удалось осуществить точную редукцию исходных урав-



нений движения жидкостей к существенно более простой системе, приведенной выше. Стоит отметить, что в процессе вывода мы не накладывали каких-либо условий на форму поверхности.

Обсудим теперь характерные значения напряженности электрического поля, при которых реализуется режим нейтрального равновесия (4.1). Рассмотрим для примера пару жидкостей — ПФМС и льняное масло, см. Таблицу 2.2. По нашим оценкам для того, чтобы стабилизировать небольшой скачок скоростей, к примеру 1 см/с, необходима напряженность электрического поля порядка 5 кВ/см. Поскольку зависимость электрического поля от разности скоростей является линейной, то для стабилизации скачка скоростей в 10 см/с требуется поле уже в 50 кВ/см. Таким образом, внешнее электрическое поле способно стабилизировать разрыв скоростей на границе величиной вплоть до нескольких метров в секунду. При больших скоростях внешнее электрическое поле может привести к пробое жидкостей.

## 4.6 Нелинейные волны в отсутствии разрыва скоростей на границе

Вернемся к обсуждению полной системы уравнений (4.12) и (4.13). Можно заметить, что она существенно упрощается при отсутствии дестабилизирующего фактора – тангенциального скачка скоростей на границе раздела жидкостей. В этом случае уравнения движения границы примут вид

$$\eta_t - \left(\frac{1+A}{2}\right) \hat{k}\psi = -\frac{A(1+A)}{2} \left(\hat{k}(\eta\hat{k}\psi) + \nabla_{\perp}(\eta\nabla_{\perp}\psi)\right), \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} \psi_t - \left(\frac{2A_E^2 E^2}{1+A_E}\right) \hat{k}^{-1}\eta_{xx} &= \frac{A(1+A)}{4} \left((\hat{k}\psi)^2 - (\psi_x)^2\right) + \\ &+ \left(\frac{2A_E^3 E^2}{1+A_E}\right) \left[\frac{1}{2} \left(\eta_x^2 + (\nabla_{\perp}\hat{k}^{-1}\eta_x)^2\right) + \right. \\ &\left. + \eta\eta_{xx} - \hat{k}^{-1}\partial \left(\eta\hat{k}\eta_x - \nabla_{\perp}\eta \cdot \nabla_{\perp}\hat{k}^{-1}\eta_x\right)\right]. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Действуя оператором  $\hat{k}^{-1}$  на уравнение (4.35), дифференцируя (4.34) по времени, а затем вычитая получившиеся выражения друг из друга, мы получим (2+1)-мерное уравнение для

эволюции поверхности раздела, учитывающее квадратичные нелинейности:

$$\begin{aligned} \eta_{tt} - c_e^2 \eta_{xx} = & \frac{\hat{k}}{2} (c_e^2 A_E \eta_x^2 - A \eta_t^2) + \hat{k} (c_e^2 A_E \eta \eta_{xx} - A \eta \eta_{tt}) + \\ & + \nabla_{\perp} \left[ c_e^2 A_E \partial_x (\eta \nabla_{\perp} \hat{k}^{-1} \eta_x) - A \partial_t (\eta \nabla_{\perp} \hat{k}^{-1} \eta_t) \right] + \\ & + \frac{\hat{k}}{2} \left[ c_e^2 A_E (\nabla_{\perp} \hat{k}^{-1} \eta_x)^2 - A (\nabla_{\perp} \hat{k}^{-1} \eta_t)^2 \right], \end{aligned} \quad (4.36)$$

где  $c_e = EA_E \sqrt{(1+A)/(1+A_E)}$  — скорость распространения линейных волн, которая пропорциональна напряженности внешнего поля. При выводе (4.36) мы исключили функцию  $\psi$  при помощи выражения  $\psi = 2\hat{k}^{-1}\eta_t/(1+A) + O(\alpha)$ , следующего из (4.34).

В линейном приближении уравнение (4.36) представляет собой (1+1)-мерное волновое уравнение

$$\eta_{tt} = c_e^2 \eta_{xx}.$$

Его общее решение представимо в виде суммы волн, распространяющихся вдоль оси  $x$  в противоположных направлениях:

$$\eta(x, y, t) = f(x - c_e t, y) + g(x + c_e t, y),$$

где  $f$  и  $g$  — произвольные функции двух переменных. Отметим, что переменная  $y$  здесь играет роль параметра. Это обусловлено тем, что она не входит в волновое уравнение в явном виде.

В общем случае нелинейное уравнение (4.36) не может быть решено аналитически. Тем не менее, как несложно заметить, существенный прогресс в его анализе возможен при условии, что

$$A = A_E \quad \Leftrightarrow \quad \rho_1/\rho_2 = \varepsilon_1/\varepsilon_2, \quad (4.37)$$

то есть отношение плотностей жидкостей равно отношению их диэлектрических проницаемостей (как следствие,  $c_e = EA$ ). Действительно, тогда уравнение (4.36) примет более простой вид:

$$\begin{aligned} E^{-2} \eta_{tt} - A^2 \eta_{xx} = & \frac{\hat{k}}{2} (A^3 \eta_x^2 - A \eta_t^2) + \frac{\hat{k}}{2} \left[ A^3 (\nabla_{\perp} \hat{k}^{-1} \eta_x)^2 - A (\nabla_{\perp} \hat{k}^{-1} \eta_t)^2 \right] + \\ & + \nabla_{\perp} \left[ A^3 \partial_x (\eta \nabla_{\perp} \hat{k}^{-1} \eta_x) - A \partial_t (\eta \nabla_{\perp} \hat{k}^{-1} \eta_t) \right] + O(\alpha^3). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Важно, что это уравнение (4.38) допускает пару следующих точных решений:

$$\eta(x, y, t) = f(x - EAt, y), \quad \eta(x, y, t) = g(x + EAt, y). \quad (4.39)$$

В соответствии с этими решениями, трехмерные нелинейные волны произвольной формы без искажений распространяются в направлении, либо против направления внешнего электрического поля – так, как если бы они описывались простейшими линейными уравнениями

$$\eta_t = \mp AE\eta_x.$$

Таким образом, нелинейность в рассматриваемом случае не влияет на скорость распространения волны и не приводит к ее опрокидыванию. Влияние нелинейности следует учитывать только при анализе взаимодействия противоположно направленных волн.

Рассмотрим взаимодействие встречных волн в ситуации, когда условие (4.37) выполняется. Уравнение (4.36) с точностью до масштабного преобразования совпадает с уравнением, выведенным в работе [64] для описания эволюции свободной поверхности жидкости с высокой диэлектрической проницаемостью в горизонтальном электрическом поле. В терминах настоящей работы, рассматриваемая в [64] ситуация соответствует пределам  $\rho_2/\rho_1 \rightarrow 0$  и  $\varepsilon_2/\varepsilon_1 \rightarrow 0$  (т.е.  $A = A_E = 1$ ). По аналогии с [64] находим, что общее решение уравнения (4.36) имеет вид:

$$\begin{aligned} \eta(x, y, t) = & f(x - EAt, y) + g(x + EAt, y) - \frac{EA}{2} \hat{k} \left( fg + \nabla_{\perp} \hat{k}^{-1} f \cdot \nabla_{\perp} \hat{k}^{-1} g \right) - \\ & - \frac{EA}{2} \nabla_{\perp} \left( f \nabla_{\perp} \hat{k}^{-1} g + g \nabla_{\perp} \hat{k}^{-1} f \right) + O(\alpha^3). \end{aligned} \quad (4.40)$$

Это выражение описывает нелинейную суперпозицию встречных трехмерных волн (4.39). Из (4.40) видно, что при взаимодействии волны остаются структурно устойчивыми.

Характер взаимодействия волн демонстрируется на Рисунке 4.5, на котором представлена геометрия границы раздела при встрече трехмерных пространственно локализованных волн вида

$$f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2), \quad g(x, y) = -\exp(-x^2 - y^2). \quad (4.41)$$

Как видно из Рисунка 4.5 (а), роль нелинейности нарастает при сближении уединенных

волн, а в момент их встречи ( $t = 0$ ) именно нелинейность определяет геометрию границы (в линейном приближении в этот момент граница является плоской). С влиянием нелинейности связано отсутствие симметрии на Рисунке 4.5 (б) относительно прямой  $x = 0$ .

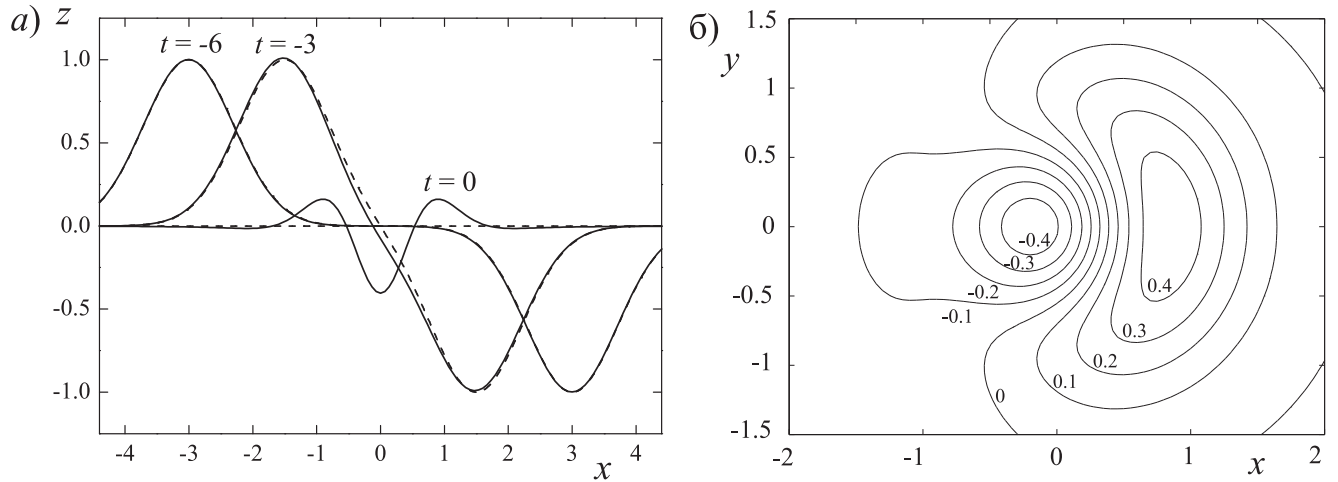


Рисунок 4.5: Показана эволюция встречных трехмерных волн (4.41) при  $A = A_E = 0.5$ ,  $E = 1$ . Приведено сечение поверхности раздела плоскостью  $y = 0$  в последовательные моменты времени  $t = -6$ ,  $t = -3$  и  $t = 0$ . Штриховая линия – линейный анализ, сплошная линия – нелинейный анализ (а). Также приведены линии уровня (изолинии), соответствующие постоянным значениям функции  $\eta$ , для встречных волн (4.41) в момент времени  $t = 0.4$  при  $A = A_E = 0.5$  (б).

## 4.7 Выводы к Главе 4

Проведенное теоретическое исследование нелинейной динамики поверхности раздела диэлектрических жидкостей под действием сильного горизонтального электрического поля привело к следующим новым результатам:

1. В рамках гамильтонова формализма получены нелинейные интегро-дифференциальные уравнения, описывающие динамику слабо-нелинейных волн на границе раздела жидкостей под действием горизонтального электрического поля при наличии тангенциального разрыва скоростей на границе.
2. Получен широкий класс точных решений уравнений, описывающих нелинейную динамику поверхности раздела жидкостей в состоянии нейтрального равновесия, соответствующих взаимодействующим периодическим, либо локализованным волнам. Показано, что уединенные нелинейные волны могут распространяться без искажений вдоль на-

правления электрического поля с постоянной скоростью, в ситуации когда, отношение плотностей жидкостей равно обратному отношению их диэлектрических проницаемостей. Описано взаимодействие данных солитоноподобных возмущений; как оказалось, они могут образовать структурно устойчивый волновой пакет (бризер).

3. Выявлена возможность реализации особого режима движения жидкостей, при котором потенциалы электрического поля и потенциалы скорости пропорциональны. Соответствующая этому режиму редукция осуществима для произвольной конфигурации поверхности, в том числе и ситуации, при которых углы наклона поверхности не являются малыми.
4. Для случая сильного электрического поля, когда влияние разрыва скоростей на границе пренебрежимо мало, показано, что волны малой, но конечной амплитуды могут распространяться без искажений формы вдоль направления внешнего горизонтального электрического поля по поверхности раздела жидкостей. Данная ситуация реализуется для жидкостей, отношение плотностей которых равно отношению их диэлектрических проницаемостей. Получено решение уравнений движения, описывающее взаимодействие распространяющихся в противоположном направлении нелинейных волн. В соответствии с ним, встречные уединенные волны произвольной геометрии в результате взаимодействия сохраняют свою форму и фазу.

Проведенный в настоящей главе анализ свидетельствует о том, что внешнее горизонтальное электрическое поле способно стабилизировать неустойчивость Кельвина-Гельмгольца на слабо-нелинейных стадиях эволюции системы. Нелинейное взаимодействие волн не приводит к росту амплитуды возмущений, как следствие малоугловое приближение, используемое в предложенной модели, не будет нарушаться с течением времени.

Изложенные в настоящей главе научные результаты опубликованы в работах [120–124, 126].

# Глава 5. Взаимодействие сильно-нелинейных волн на свободной границе непроводящей жидкости в горизонтальном электрическом поле

## 5.1 Введение

В настоящей главе мы продолжаем исследование влияния горизонтального электрического поля на эволюцию поверхности идеальной непроводящей жидкости. В Главе 4 было получено аналитическое решение, описывающее распространение и взаимодействие нелинейных волн на границе раздела жидкостей, отношение плотностей которых равно отношению их диэлектрических проницаемостей. В соответствии с ним, слабо-нелинейные волны могут распространяться без искажений вдоль направления внешнего электрического поля. Нелинейность оказывает влияние только на взаимодействие встречных волн. Было также упомянуто, что решения для бегущих в одну сторону волн справедливы и для сильно-нелинейных волн на границе раздела в пределе  $\varepsilon_2/\varepsilon_1 = \rho_2/\rho_1 \rightarrow 0$ . Данный предел соответствует границе раздела диэлектрической жидкости с высокой проницаемостью и газовой среды малой плотности. В работах [64, 65] были получены решения, описывающие взаимодействие локализованных слабо-нелинейных волн на такой границе. Согласно им, волны после взаимодействия полностью восстанавливают форму, т.е. являются структурно устойчивыми. Основной вопрос заключается в том, сохранится ли это свойство при взаимодействии сильно-нелинейных волн.

В связи с этим, целью настоящей главы является исследование процесса взаимодействия встречных сильно-нелинейных волн на границе непроводящей жидкости и газовой среды малой плотности. Это требует анализа полной системы уравнений движения жидкости, являющихся нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных размерности  $2+1$ . Как будет показано, эту систему можно свести к системе интегро-дифференциальных уравнений движения непосредственно для границы раздела размерности  $1+1$ , удобной для численного анализа. Важным результатом данной главы является доказательство того, что волны произвольной амплитуды не обмениваются энергией и импульсом при столкновении, т.е. взаимодействие является упругим.

Глава построена следующим образом. В разд. 5.2 приводятся уравнения движения свободной поверхности диэлектрической жидкости с высокой проницаемостью в сильном электрическом поле (влияние силы тяжести и капиллярности пренебрежимо мало по сравнению с электростатическими силами). Далее в разд. 5.3 выводятся уравнения движения в конформных переменных, они оказываются кубически нелинейными. В разд. 5.4 показано, что взаимодействующие волны обладают фундаментальным свойством — энергия и импульс каждой из волн сохраняется. В следующем разд. 5.5 приведено описание численного алгоритма решения уравнений движения в конформном пространстве. В разд. 5.6 представлены результаты численного моделирования взаимодействия сильно-нелинейных волн. В заключительном разд. 5.7 приведены краткие выводы по главе.

## 5.2 Исходные уравнения движения

Рассмотрим потенциальное течение идеальной диэлектрической жидкости бесконечной глубины, помещенной во внешнее однородное поле. В невозмущенном состоянии свободная поверхность представляет собой плоскость  $y = 0$  (ось  $x$  прямоугольной системы координат лежит в этой плоскости, а ось  $y$  направлена по нормали к ней). Напряженность внешнего электрического поля направлена по оси  $x$ ; по абсолютному значению она равна  $E$ . Положим, что отклонение поверхности раздела от плоскости  $y = 0$  задается функцией  $\eta(x, t)$ , т.е. уравнение  $y = \eta$  определяет профиль границы.

Дисперсионное соотношение для электрокапиллярных волн в горизонтальном электри-

ческом поле имеет вид [3, 4, 90]:

$$\omega^2 = gk + \frac{E^2 \varepsilon_0 (\varepsilon - 1)^2}{\rho (\varepsilon + 1)} k^2 + \frac{\sigma}{\rho} k^3,$$

где  $\omega$  — частота,  $k$  — волновое число,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения,  $g$  — ускорение свободного падения,  $\varepsilon$  — диэлектрическая проницаемость среды,  $\varepsilon_0$  — электрическая постоянная,  $\rho$  — плотность. Рассмотрим случай сильного поля,

$$E^2 \gg (\varepsilon + 1) \varepsilon_0^{-1} (\varepsilon - 1)^{-2} \sqrt{\rho g \sigma},$$

когда появляется диапазон волновых чисел для которых влияние электрического поля будет доминирующим. Этот диапазон задается неравенством

$$\rho g (\varepsilon + 1) \varepsilon_0^{-1} (\varepsilon - 1)^{-2} E^{-2} \ll k \ll \sigma^{-1} (\varepsilon + 1)^{-1} \varepsilon_0 (\varepsilon - 1)^2 E^2.$$

При этих условиях распространение волн будет бездисперсионным:

$$\omega^2 = c^2 k^2, \quad c^2 = \frac{E^2 \varepsilon_0 (\varepsilon - 1)^2}{\rho (\varepsilon + 1)}.$$

Применительно к рассматриваемой ситуации система уравнений (4.2)-(4.6) примет вид:

$$\Delta \phi = 0, \quad \Delta \varphi = 0, \quad (5.1)$$

$$\phi_t + (\nabla \phi)^2 / 2 = (P_E - P_0) / \rho, \quad y = \eta(x, t), \quad (5.2)$$

$$\eta_t = \phi_y - \eta_x \phi_x, \quad y = \eta(x, t), \quad (5.3)$$

$$\varphi_y - \eta_x \varphi_x = 0, \quad y = \eta(x, t), \quad (5.4)$$

$$\phi \rightarrow 0, \quad \varphi \rightarrow -Ex, \quad y \rightarrow -\infty, \quad (5.5)$$

где  $P_E = \varepsilon \varepsilon_0 (\nabla \varphi)^2 / 2$  — давление на границе, оказываемое со стороны внешнего электрического поля,  $P_0 = \varepsilon \varepsilon_0 E^2 / 2$  — постоянная Бернулли. Для удобства дальнейшего анализа введем безразмерные величины

$$\phi \rightarrow \lambda E \varepsilon_0^{1/2} \varepsilon^{1/2} \rho^{-1/2} \phi, \quad t \rightarrow \lambda E^{-1} \varepsilon_0^{-1/2} \varepsilon^{-1/2} \rho^{1/2} t, \quad \varphi \rightarrow \lambda E \varphi, \quad \mathbf{r} \rightarrow \lambda \mathbf{r},$$



где  $\lambda$  — характерная длина волны возмущений. В работах [64, 65] было показано, что эта система допускает точные решения в виде бездисперсионно распространяющихся нелинейных поверхностных волн произвольной амплитуды вдоль направления внешнего электрического поля.

### 5.3 Уравнения в конформных переменных

Уравнения движения границы представимы в гамильтоновой форме, причем функции  $\eta$  и  $\psi = \Phi|_{y=\eta}$  являются канонически сопряженными величинами

$$\psi_t = -\frac{\delta H}{\delta \eta}, \quad \eta_t = \frac{\delta H}{\delta \psi}. \quad (5.6)$$

Гамильтониан исследуемой системы  $H$  имеет вид

$$H = \int_{z \leq \eta} \frac{(\nabla \Phi)^2}{2} d^2 r - \int_{z \leq \eta} \frac{(\nabla \varphi)^2 - 1}{2} d^2 r. \quad (5.7)$$

Уравнения (5.6) обеспечивают минимум функционала действия  $S = \int L dt$ , где  $L$  — лагранжиан системы, равный

$$L = \int \psi \eta_x dx - H.$$

По аналогии с работами [65, 79, 80, 127] совершим конформное преобразование области  $-\infty < y < \eta$  и  $-\infty < x < +\infty$  в полуплоскость  $-\infty < v < 0$  и  $-\infty < u < +\infty$ . В исследуемой задаче данные переменные имеют конкретный физический смысл. Конформная переменная  $u$  совпадает с точностью до знака со значениями потенциала электрического поля  $\varphi$ , а условие  $v = \text{const}$  определяет силовые линии электрического поля. В конформных переменных профиль поверхности жидкости определяется в параметрическом виде

$$y = Y(u, t), \quad x = X(u, t) = u - \hat{H}Y, \quad (5.8)$$

где  $\hat{H}$  — преобразование Гильберта:

$$\hat{H}f(u) = \frac{1}{\pi} \text{V.P.} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(u')}{u - u'} du'.$$

Связь между функциями  $\eta(x, t)$  и  $Y(u, t)$  задается неявным соотношением

$$Y(u, t) = \eta(u - \hat{H}Y, t).$$

Для дальнейшего рассмотрения важно, что для исследуемой задачи интегралами движения являются полная энергия системы  $H$  и импульс вдоль горизонтальной оси  $P$  (без электрического поля см. [127, 128]):

$$H = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} (\Psi \hat{H} \Psi_u + Y \hat{H} Y_u) du, \quad P = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi Y_u du,$$

где функция  $\Psi(u, t)$  определяет значение потенциала скорости на границе  $v = 0$ . Из условий

$$\frac{\delta S}{\delta Y} = 0, \quad \frac{\delta S}{\delta \Psi} = 0$$

получим уравнения движения

$$Y_t X_u - Y_u X_t = -\hat{H} \Psi_u, \quad (5.9)$$

$$\Psi_t X_u - \Psi_u X_t - \hat{H}(Y_u \Psi_t - Y_t \Psi_u) = \hat{H} Y_u. \quad (5.10)$$

За влияние электрического поля в этой системе отвечает линейный член в правой части второго уравнения.

Для удобства численного решения систему (5.9) и (5.10) следует разрешить относительно производных по времени от функций  $Y$  и  $\Psi$  (применительно к капиллярно-гравитационным волнам эта процедура описана в [81, 128]). Для этого введем комплексные функции

$$Z = X + iY = u + 2i\hat{P}Y, \quad \Phi = 2\hat{P}\Psi,$$

аналитические в нижней полуплоскости комплексной переменной  $u$  (здесь  $\hat{P} = (1 + i\hat{H})/2$  – проектор). В итоге уравнения движения границы примут вид:

$$Z_t = iU Z_u, \quad (5.11)$$

$$\Phi_t = iU \Phi_u - B + \hat{P}(1/J - 1), \quad (5.12)$$

где  $J = X_u^2 + Y_u^2$  – якобиан конформного преобразования, а также введены обозначения

$$U = -2\hat{P} \left( \hat{H}\Psi_u/J \right), \quad B = \hat{P} \left( \Phi_u \bar{\Phi}_u/J \right).$$

Здесь  $\bar{\Phi}$  – комплексное сопряжение  $\Phi$ . Отметим, что за действие электрического поля ответственно последнее слагаемое в правой части (5.12); в конформных переменных электростатическое давление (с точностью до постоянного множителя) совпадает с обратным якобианом преобразования  $1/J$ .

Применительно к численному анализу, недостатком системы уравнений (5.11) и (5.12) является наличие якобиана  $J$  в знаменателях, что может служить источником численной неустойчивости. Если, следуя [127, 129], ввести новые переменные

$$R = 1/Z_u, \quad V = i\Phi_u/Z_u,$$

то эта система примет следующий симметричный вид:

$$R_t = i(UR_u - U_uR), \quad V_t = i(UV_u - D_uR). \quad (5.13)$$

где

$$U = \hat{P}(V\bar{R} + \bar{V}R), \quad D = \hat{P}(V\bar{V} - R\bar{R}).$$

Эти интегро-дифференциальные уравнения являются кубически нелинейными. Они оказываются удобными для численного моделирования сильно-нелинейной динамики свободной поверхности жидкости в горизонтальном электрическом поле. Численно подобная система уравнений была исследована в работах [81, 130]. В работах [84, 85] доказана их математическая корректность и сходимости приближенного численного решения. В разд. 5.5 приводится описание численного алгоритма решения данной системы, основанного на применении спектральных методов.

## 5.4 Упругое взаимодействие волн

Важнейшим свойством системы (5.9) и (5.10) является то, что она допускает пару точ-

ных частных решений

$$Y = \pm \hat{H}\Psi = Y^\pm(u \mp t), \quad (5.14)$$

где  $Y^\pm$  – произвольные функции. Эти решения соответствуют волнам произвольной геометрии, распространяющимся без искажений по направлению (верхние знаки), либо против направления (нижние знаки) внешнего электрического поля с постоянной скоростью. Для функций  $R$  и  $V$  частные решения (5.14) записываются как

$$R = 1 \pm iV = R^\pm(u \mp t), \quad (5.15)$$

где

$$R^\pm = \left(1 - \hat{H}Y_u^\pm + iY_u^\pm\right)^{-1}.$$

То обстоятельство, что нелинейные волны, по отдельности распространяющиеся в положительном, либо отрицательном направлениях оси  $x$ , ведут себя подобно линейным, не означает, конечно, что не будет происходить взаимодействия встречных волн. Рассмотрим столкновение уединенных волн, для которых  $Y \rightarrow 0$  и  $\Psi \rightarrow 0$  при  $u \rightarrow \pm\infty$ .

Понятно, что взаимодействие волн существенно только в момент столкновения. В остальное время взаимодействие пренебрежимо мало; волны распространяются без искажений. До и после встречи волн, т.е. когда они разделены в пространстве, каждой волне можно сопоставить некие энергию и импульс. Рассмотрим, как ведут себя эти величины при столкновении. Введем вспомогательные функции

$$F^\pm(u, t) = (Y \pm \hat{H}\Psi)/2, \quad (5.16)$$

которые, как можно считать, соответствуют распространяющимся в противоположных направлениях волнам. Действительно, для частного решения (5.14), соответствующего движущейся направо волне, будет  $F^+ = Y^+$  и  $F^- = 0$ , а для волны, движущейся налево, будет  $F^+ = 0$  и  $F^- = Y^-$ .

В терминах  $F^\pm$  энергия системы  $H$  и импульс  $P$  переписутся как

$$H = H^+ + H^-, \quad P = P^+ + P^-,$$

$$H^\pm = \mp P^\pm = - \int_{-\infty}^{+\infty} F^\pm \hat{H} F_u^\pm du.$$

Видно, что для  $H$  и  $P$  произошло разделение на два слагаемых, первое из которых содержит лишь функцию  $F^+$ , а второе – функцию  $F^-$ . Это позволяет интерпретировать  $H^\pm$  и  $P^\pm$  как энергии и импульсы распространяющихся в противоположных направлениях волн.

Оказывается, что каждая из величин  $H^\pm$  и  $P^\pm$  является интегралом движения. Действительно, несложно заметить, что

$$H^\pm = (H \pm P)/2, \quad P^\pm = \mp(H \mp P)/2,$$

то есть энергии и импульсы отдельных волн записываются как комбинации инвариантов  $H$  и  $P$ . Это означает, что при столкновении энергия и импульс встречных уединенных нелинейных волн произвольной геометрии сохраняется, т.е. их взаимодействие – упругое.

Следует отметить, что эта ситуация во многом сходна с альфвеновскими волнами в идеальной жидкости. Волновые пакеты произвольной формы могут без искажений распространяться по направлению, либо против направления внешнего магнитного поля. Взаимодействие возможно только между встречными волнами, причем, аналогично рассматриваемой задаче, оно является упругим [75, 76].

Итак, мы показали, что система (5.13) допускает точные решения в виде нелинейных волн произвольной формы, движущихся без искажений. Интерес представляет описание взаимодействия встречных волн. Нам известно, что слабо-нелинейные волны восстанавливают свою форму и фазу после взаимодействия. Для того, чтобы понять, обладают ли таким же свойством сильно-нелинейные волны, следует осуществить численное моделирование полной системы уравнений. В следующем разделе мы приведем описание численного алгоритма, на основе которого будет строиться численное решение системы (5.13).

## 5.5 Численный алгоритм

Как правило, численное описание динамики жидкостей строится на основе конечно-разностных схем. Существуют различные вариации данного метода, такие как метод конечных разностей и метод конечных элементов. Эти методы являются достаточно эффек-

тивными и демонстрируют свою применимость для широкого класса задач, см., к примеру, [131, 132]. Однако непосредственное использование этих методов к системе уравнений (5.13) осложнено тем, что она содержит интегральный оператор  $\hat{P}$ . В связи с этим, численное решение системы (5.13) будет строиться в рамках спектрального метода, т.е. функции  $R, V$  будут аппроксимироваться конечными рядами Фурье. Как следствие, граничные условия для  $R(t, u)$  и  $V(t, u)$  будут периодическими.

Численная схема будет строиться на основе следующего ключевого свойства оператора-проектора

$$\hat{P} \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k e^{-iku} \right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a^k e^{-iku},$$

где  $a^k$  — коэффициенты ряда Фурье некоторой функции  $a(u)$ . Отметим также, что операция взятия производной в Фурье-пространстве определяется как

$$\partial_u \left( \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a^k e^{-iku} \right) = - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} ik \cdot a^k e^{-iku}.$$

Итак, приближенное решение будем искать в виде

$$R_N(u, t) = 1 + \sum_{k=1}^N R^k e^{-iku}, \quad V_N(u, t) = \sum_{k=1}^N V^k e^{-iku},$$

где  $R^k, V^k$  — спектральные функции. Функции  $R, V$  содержат только отрицательные гармоники в силу своей аналитичности в нижней комплексной полуплоскости. Пользуясь теоремой о свертке, операцию умножения  $A \cdot B$  введем следующим образом:

$$A_N \cdot B_N = \mathcal{F}^{-1} (A^k * B^k),$$

где  $\mathcal{F}^{-1}$  — обратное преобразование Фурье, а индексом "\*" обозначена циклическая свертка последовательностей  $A^k$  и  $B^k$ . Действуя преобразованием Фурье на систему уравнений (5.13), получаем для спектральных функций  $R^k, V^k$  систему приближенных уравнений

$$R_t^k = i(U^k * R_u^k - U_u^k * R^k), \quad V_t^k = i(U^k * V_u^k - D_u^k * R^k), \quad (5.17)$$

где

$$U^k = \hat{P}(V^k * \bar{R}^k + \bar{V}^k * R^k), \quad D^k = \hat{P}(V^k * \bar{V}^k - R^k * \bar{R}^k).$$

В сущности система (5.17) является системой обыкновенных дифференциальных уравнений, каждое из которых описывает эволюцию  $k$ -ой комплексной гармоники функций  $R$  и  $V$ . Искомые функции  $R_N$  и  $V_N$  будут определяться при помощи обратного преобразования Фурье от спектральных функций  $R^k$  и  $V^k$ . К системе (5.17) применимы различные методы интегрирования по времени. В представленных в диссертации расчетах использовался явный метод Рунге-Кутты четвертого порядка.

## 5.6 Результаты численного моделирования

### 5.6.1 Сравнение с точным решением

Прежде чем приступить к анализу взаимодействия сильно-нелинейных волн на границе жидкости следует убедиться в правильности выбора используемых численных методов. Это можно сделать путем сравнения данных, полученных при помощи численного счета и точного аналитического решения (5.15). Представим результаты численного эксперимента, целью которого являлось сравнение с решением (5.15). Начальные условия задавались следующим образом:

$$R(u) = 1 + 0.5 \exp(-iu), \quad V(u) = -0.5i \exp(-iu).$$

Точное решение, соответствующее данным условиям описывает стационарное движение плоской волны с пространственным и временным периодом  $2\pi$  в направлении противоположном электрическому полю,

$$R(u, t) = 1 + 0.5 \exp(-iu - it), \quad V(u, t) = -0.5i \exp(-iu - it). \quad (5.18)$$

Полное число гармоник равнялось  $N = 1024$ , соответственно функции  $R$ ,  $V$  содержали  $N/2$  отрицательных гармоник. Интегрирование по времени провести с шагом  $\Delta t = 0.001$ . Для того, чтобы показать устойчивость численного решения необходимо произвести расчет на достаточно длительном интервале времени. В наших расчетах он равнялся тысяче периодов, т.е.  $T = 1000 \cdot 2\pi \approx 6283$ .

Результаты численного эксперимента демонстрируют полное согласие с аналитическим

решением (5.15). На Рисунке 5.1 представлен профиль поверхности жидкости в последовательные моменты времени в течение одного периода движения волны. Хорошо видно, что возмущение поверхности представляет собой плоскую волну вида (5.18). Расчеты показывают, что в течение всего интервала счета не происходит значительного роста амплитуды высших гармоник. На Рисунке 5.2 (слева) представлен спектр функции  $R(t, u)$  в различные моменты времени. Видно, что существенной является только первая гармоника. Шумы в "хвосте" спектральных функций связаны только с вычислительной погрешностью. Поскольку исследуемая система является гамильтоновой мы можем оценить погрешность вычислений. Относительная ошибка будет равна  $\Delta H/H$ , где  $\Delta H$  – изменение полной энергии системы. На Рисунке 5.2 показана также зависимость погрешности вычислений от времени (правый график). Видно, что рост погрешности очень медленный, и к концу расчетного интервала ошибка составляет малую величину порядка  $10^{-12}$ .

Важным параметром характеризующим форму границы является максимальная крутизна поверхности ( $s$ ), или другими словами тангенс наибольшего угла ее наклона. Для данной реализации  $s \approx 0.58$ , что является достаточно большой величиной. В работе [80] наблюдалось опрокидывание периодической волны при  $s \approx 0.29$ .

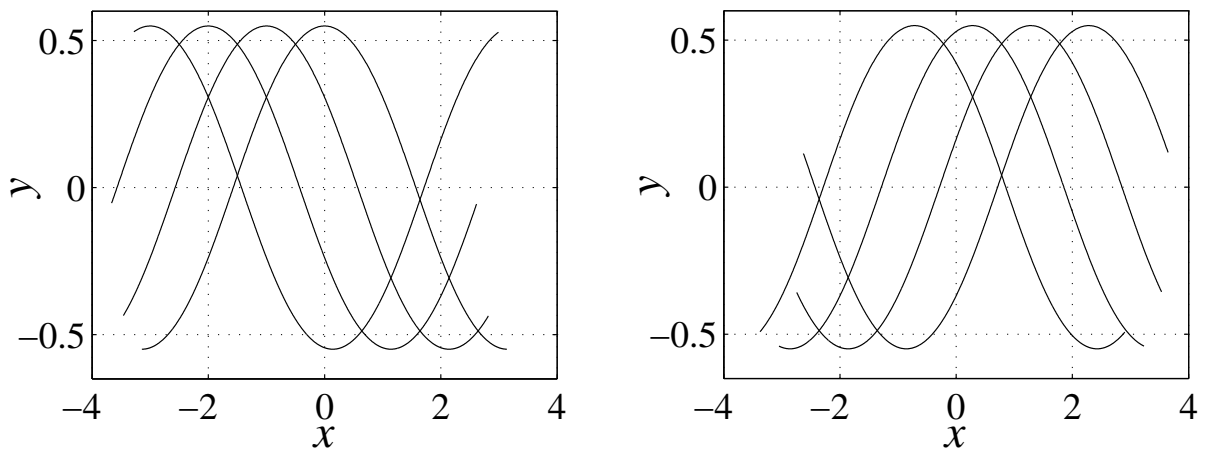


Рисунок 5.1: Свободная поверхность жидкости в последовательные моменты времени:  $t = 0, 1, 2, 3$  для левого графика;  $t = 4, 5, 6, 7$  для правого.

### 5.6.2 Взаимодействие встречных локализованных волн

В предыдущей главе было показано, что слабо-нелинейные локализованные волны восстанавливают свою форму после взаимодействия. В случае плоской симметрии формула,



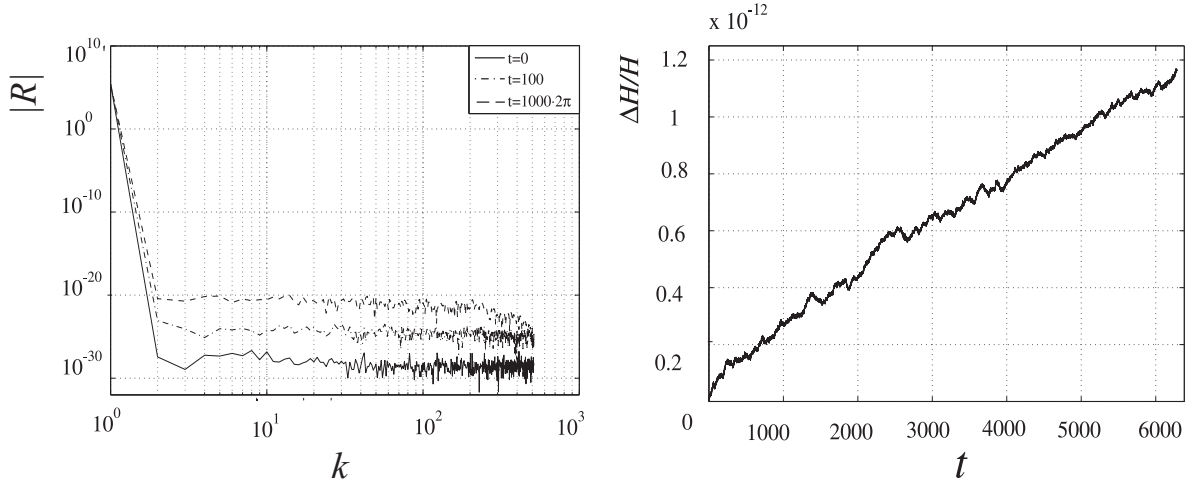


Рисунок 5.2: Слева — спектр функции  $R$  в различные моменты времени  $t$ ; справа — относительная погрешность вычислений для первого численного эксперимента.

описывающая их взаимодействие, имеет вид

$$\eta(t, x) = f + g + \partial_x \hat{H}(\hat{H}f \cdot \hat{H}g) + O(\alpha^3), \quad (5.19)$$

где  $f = f(x - t)$  и  $g = g(x + t)$  — локализованные функции (в текущих обозначениях они соответствуют функциям  $F^\pm$ ). Выражение (5.19) получено из (4.40) при учете того, что  $A = 1$  и для плоской симметрии  $\hat{k} = -\hat{H}\partial_x$ .

Для сравнения со слабо-нелинейной теорией мы вместо формулы (5.19) будем применять ее аналог, использующий конформную переменную  $u$ :

$$Y(u, t) = F^+ + F^- + \partial_u \hat{H}(\hat{H}F^+ \cdot \hat{H}F^-) - F_u^+ \hat{H}F^- - F_u^- \hat{H}F^+,$$

$$X(u, t) = u - \hat{H}Y.$$

В следующем численном эксперименте исследуем динамику взаимодействия встречных локализованных волн  $F^\pm$ . Согласно (5.16), функции  $Y$  и  $\Psi$  связаны с функциями  $F^\pm$  соотношениями

$$Y = F^+ + F^-, \quad \Psi = \hat{H}(F^- - F^+).$$

Рассмотрим встречные волны, соответствующие следующим начальным условиям:

$$F^\pm(u, 0) = a^\pm \exp(-2(u \pm u_0)^2), \quad (5.20)$$

где  $a^\pm$  – амплитуды волн, а параметр  $u_0$  определяет их начальное положение. Пространственный период  $h$  должен выбираться достаточно большим для того чтобы функции  $F^+$  и  $F^-$  оставались локализованными на протяжении всего периода счета. В данном расчете мы брали  $h = 20$ . Параметры счета были следующие:  $\Delta t = 0.001$ ,  $N = 2048$ ,  $T = 10$ .

На Рисунке 5.3 показаны результаты численного расчета взаимодействия встречных волн с амплитудами  $a^+ = 0.3$  и  $a^- = 0.15$ ; при этом полагалось, что  $u_0 = 5$ . Отметим, что максимальная крутизна поверхности  $s$  в момент  $t = 0$  составляет 0.34, т.е. исследуемые волны являются существенно нелинейными. Видно, что волны без искажений распространяются до и после момента встречи в точке  $x = 0$ . При столкновении происходит интенсивное взаимодействие волн, в результате которого форма каждой волны меняется — они несколько наклоняются в стороны противоположные их движению.

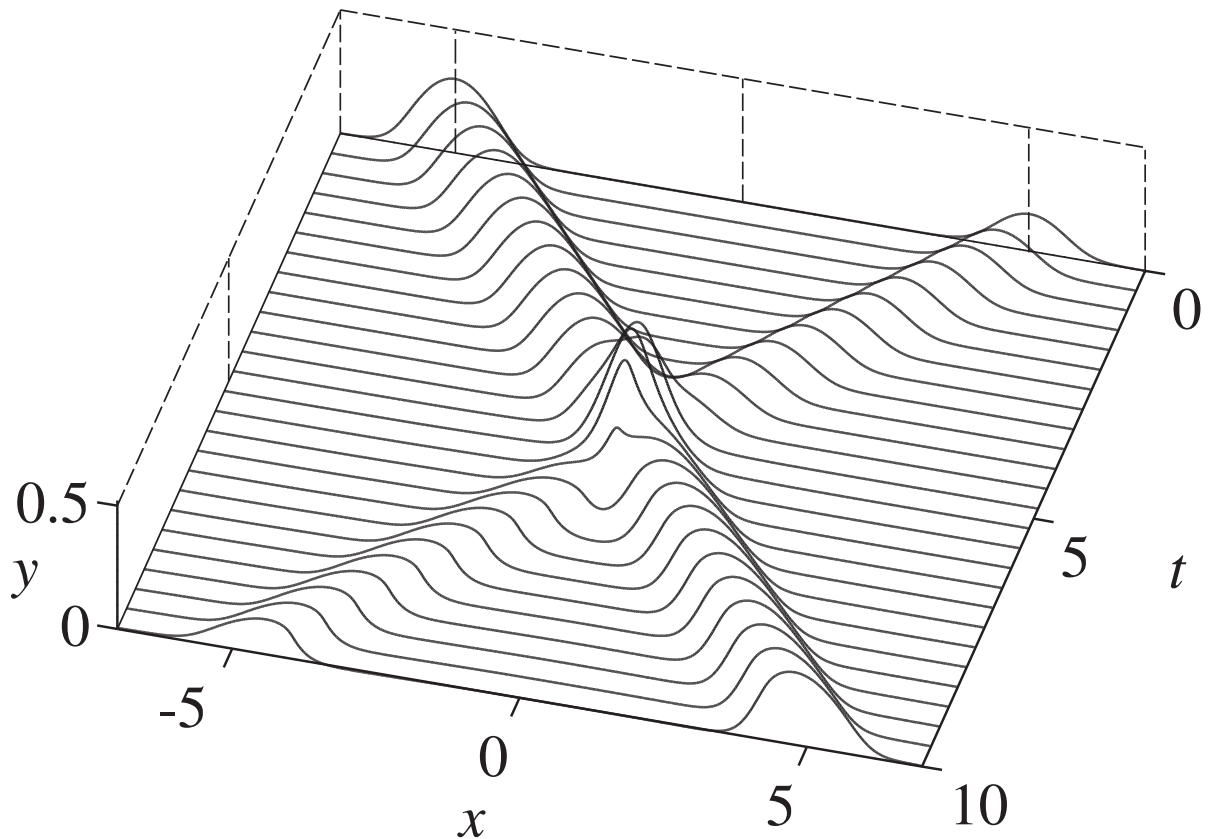


Рисунок 5.3: Эволюция поверхности жидкости при столкновении уединенных волн с амплитудами  $a^+ = 0.3$  и  $a^- = 0.15$ .

Проведем сравнение полученных данных с аналитическим решением, описывающим слабо-нелинейные волны (5.19). Для этого рассмотрим динамику взаимодействия волн равной амплитуды. На Рисунке 5.4 (а) представлен профиль поверхности жидкости в момент столкновения симметричных волн. Можно видеть, что для относительно небольшого значе-

ния  $a = 0.05$ , результаты численного решения полной системы (5.13) практически неотличимы от аналитического решения (5.19). Нелинейность в данном случае приводит к увеличению амплитуды возмущения на некоторую величину  $\Delta a$ . На Рисунке 5.4 (б) представлена зависимость величины  $\Delta a$  от амплитуды волн.

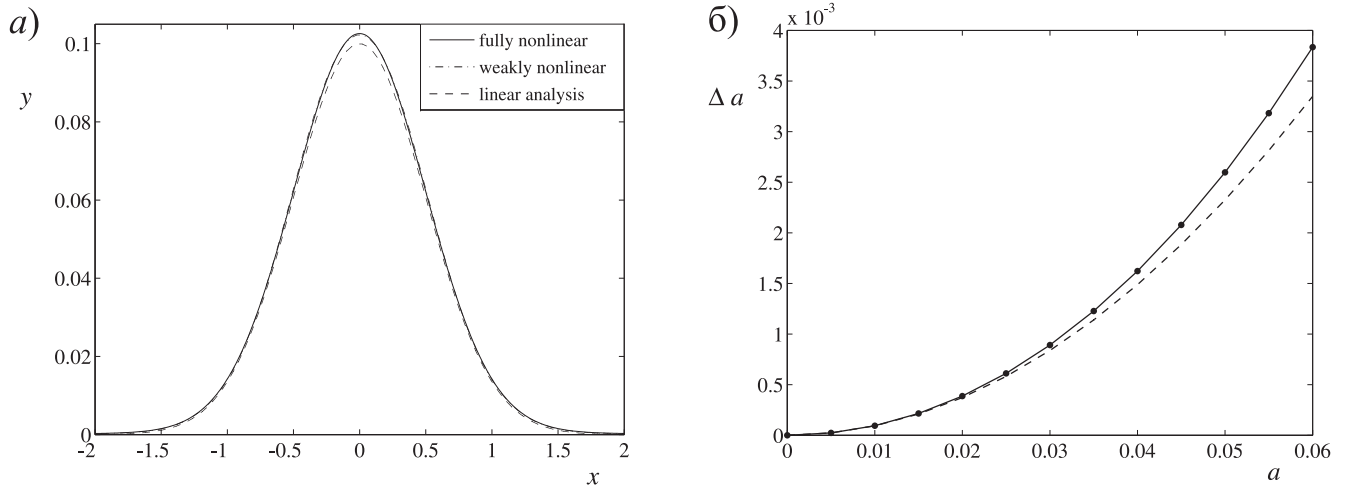


Рисунок 5.4: Слева (а) показан профиль поверхности жидкости в момент столкновения симметричных волн вида (5.20) для  $a = a^+ = a^- = 0.05$ ,  $t = 5$ ,  $u_0 = 5.0$ . Сплошная линия — результат расчета, пунктирная — линейный анализ, штрих-пунктирная — аналитическое решение (5.19). Справа (б) — зависимость величины  $\Delta a$  от амплитуды. Пунктирная линия соответствует аналитическому решению (5.19), а точками показаны результаты численного моделирования.

Решение (5.19) получено с учетом квадратичной нелинейности, поэтому зависимость  $\Delta a(a)$  является квадратичной:

$$\Delta a = \beta a^2, \quad (5.21)$$

где  $\beta$  — коэффициент, зависящий от формы встречных волн, и определяемый из соотношения (5.19). Для симметричных возмущений  $F^+$  и  $F^-$  его можно оценить как  $\beta \approx 0.93$ . Из Рисунка 5.4 видно, что при  $a < 0.05$ , т.е. при  $a \ll 1$  графики достаточно хорошо согласуются. На отрезке  $0 \leq a \leq 0.05$  вычисленная зависимость  $\Delta a(a)$  может быть аппроксимирована функцией

$$\Delta a \approx 1.33 a^{2.08},$$

что качественно и количественно согласуется с (5.21). Отметим, что отклонение верхней кривой на Рисунке 5.4 (б) от параболы связано с влиянием следующих членов разложения по  $a$ .

Рассмотрим теперь как изменится форма волн в результате взаимодействия. Для того

чтобы оценить степень деформации волн следует ввести какие-либо параметры, характеризующие различие их профиля до и после встречи. Удобно определить их как

$$S^{\pm} = \min(\partial F^{\pm}/\partial u) + \max(\partial F^{\pm}/\partial u),$$

причем вычислять  $S^{\pm}$  в момент, когда волны находятся на максимальных расстояниях друг относительно друга, т.е., в нашем случае, вблизи точек  $x = \pm h/4$  (в окрестности этих точек волны практически не взаимодействуют и их профиль определяется функциями  $F^+$  и  $F^-$  по отдельности). С учетом того, что при относительно малых амплитудах  $a^{\pm}$  будет  $u \approx x$ , можно считать, что приведенные формулы определяют разницу между крутизной переднего и заднего фронтов рассматриваемых волн. Для исходных симметричных волн справедливо  $S^{\pm} = 0$ , а в результате их взаимодействия, приводящего к потере симметрии, абсолютные значения этих параметров будут расти.

Рассмотрим взаимодействие волн равной амплитуды  $a = a^+ = a^-$ , меняющейся в диапазоне  $0 \leq a \leq 0.2$  с шагом в 0.005. Серия численных экспериментов по однократному столкновению волн (параметры расчета – прежние) позволила определить зависимость  $S^{\pm}$  от амплитуды  $a$  (см. Рисунок 5.5). Для интервала  $0 \leq a \leq 0.135$  она с высокой точностью аппроксимируется зависимостью

$$S^+ = -S^- \approx 63.2 a^{4.03}.$$

Это дает основание полагать, что деформация волн при их взаимодействии (на Рисунок 5.5 для сравнения показан профиль волны с  $a = 0.2$  до и после столкновения) определяется нелинейностью четвертого порядка по амплитуде, т.е.  $S^{\pm} \sim a^4$ .

Как видно из рисунка, при относительно малых амплитудах ( $0 < a < 0.05$ ) параметры  $S^{\pm}$  близки к нулю; это означает, что волны восстанавливают свою форму после столкновения. Можно считать, что на этом интервале взаимодействие волн вполне описывается слабо-нелинейной теорией (5.19). На интервале  $0.05 \leq a \leq 0.15$ , несмотря на сохранение энергии и импульса каждой из взаимодействующих волн, их деформация уже становится заметной. При этом параметры  $S^{\pm}$  определяются лишь четвертой степенью амплитуды  $a$ , т.е. остаточный эффект взаимодействия волн – весьма слабый. При дальнейшем росте ампли-

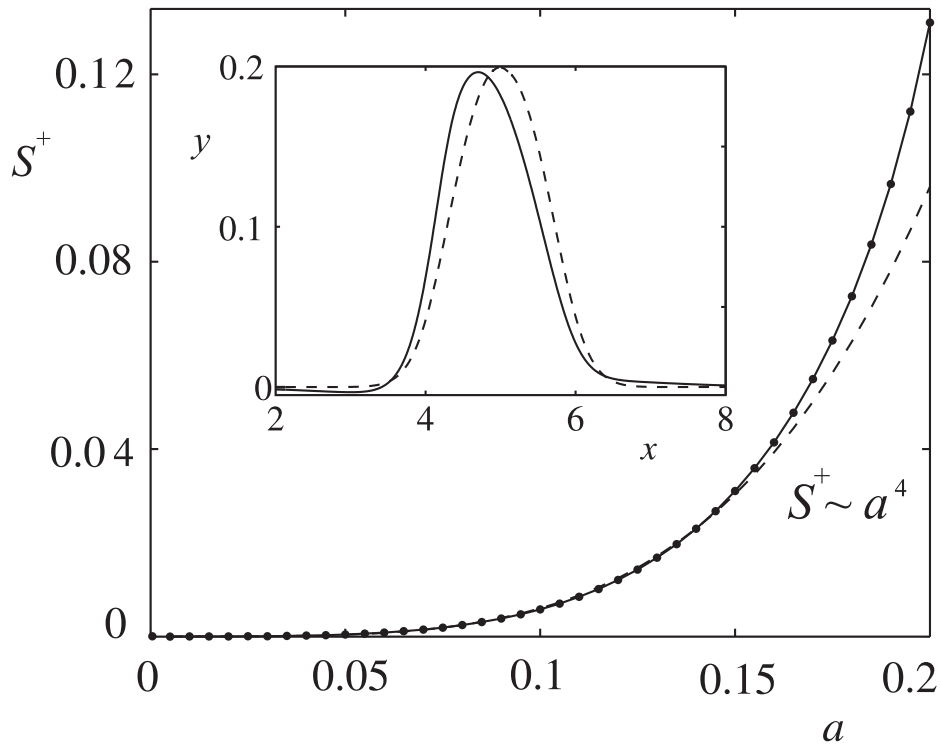


Рисунок 5.5: Зависимость параметра  $S^+$  от амплитуды  $a$ . Точками на сплошной линии показаны результаты серии численных экспериментов; пунктирная линия соответствует зависимости  $S^+ = 60 a^4$ . Во вкладке показан профиль волны с  $a = 0.2$  до (пунктирная линия) и после (сплошная линия) столкновения.

туды волн обсуждаемая зависимость отклоняется от степенной; это обусловлено влиянием нелинейностей более высокого порядка.

Рассмотрим теперь взаимодействие волн различной амплитуды. Для этого зафиксируем амплитуду одной волны,

$$F^+(u, 0) = a^+ \exp(-2(u - 5)^2), \quad F^-(u, 0) = 0.1 \exp(-2(u + 5)^2).$$

В данной серии расчетов варьировалась амплитуда волны, движущейся направо  $a^+$  в пределах от 0 до 0.15 с шагом 0.01. На Рисунке 5.6 показана зависимость введенных ранее параметров  $S^\pm$  для волн  $F^+$  и  $F^-$ .

Пунктирная линия на Рисунке 5.6 соответствует волне меняющейся амплитуды, а сплошная — волне фиксированной амплитуды. При малых значениях амплитуды пунктирная линия находится выше сплошной. В точке  $a^+ = 0.1$  эти кривые пересекаются, поскольку в ней их амплитуды равны. Далее при увеличении  $a^+$ , как видно из графика,  $|S^-| > S^+$ . Это означает, что при взаимодействии волны меньшей амплитуды деформируются сильнее. Отметим, что представленные на Рисунке 5.6 зависимости близки к квадратичным.

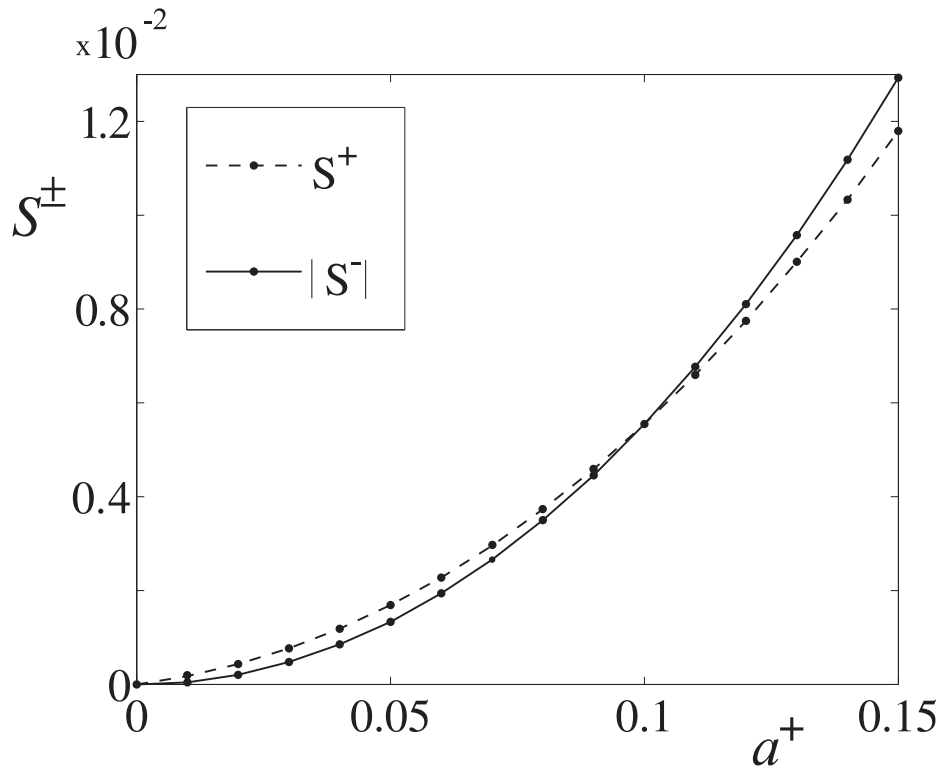


Рисунок 5.6: Зависимость параметров  $S^\pm$  от величины  $a^+$ ; пунктирная линия для волны бегущей направо  $S^+$ , сплошная для волны бегущей налево  $S^-$ .

Из расчетов видно, что углы наклона поверхности увеличиваются при взаимодействии волн. Можно предположить, что при многократном взаимодействии эта тенденция может привести к формированию особенностей.

### 5.6.3 Взаимодействие периодических волн

В предыдущих разделах было показано, что встречные сильно-нелинейные волны при взаимодействии сохраняют свою энергию, но при этом изменяют форму. На примере однократного столкновения локализованных волн было продемонстрировано, что существует тенденция к увеличению углов наклона поверхности. Ясно, что для встречных периодических волн данная тенденция может привести к формированию особых точек на поверхности жидкости, в которых профиль поверхности перестает быть взаимно однозначной функцией, либо значительно увеличивается кривизна поверхности.

В работе [65] было показано, что точное решение в виде бегущей волны устойчиво по отношению к мелко-масштабному возмущению малой амплитуды. Иначе говоря, амплитуда возмущения не нарастала в результате взаимодействия. Однако, как было показано, в преды-

дущем разделе при взаимодействии волн существует тенденция к опрокидыванию волны меньшей амплитуды. Рассмотрим динамику взаимодействия подобных волн в рамках полной системы уравнений.

Представим результаты численного моделирования взаимодействия локализованного возмущения и встречной периодической мелкомасштабной волны малой амплитуды

$$F^- = 0.4 \exp(-u^2), \quad F^+ = 0.001 \cos(10u).$$

Расчет проводился с пространственным периодом  $2\pi$ ; параметры счета были следующими  $N = 2048$ ,  $\Delta t = 10^{-4}$ . На Рисунке 5.7 представлен профиль периодической волны в начальный момент времени и в конце расчетного интервала.

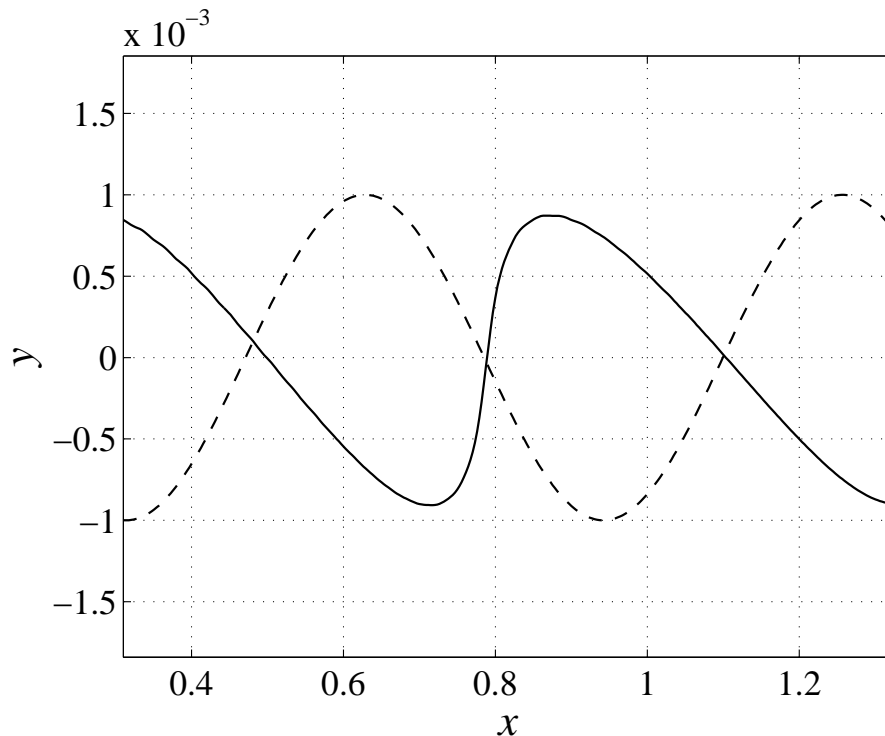


Рисунок 5.7: Периодическое возмущение поверхности; пунктирная линия соответствует  $t = 0$ , сплошная линия —  $t = 53$  (около 80 взаимодействий).

На Рисунке 5.7 мы видим существенное "укручение" фронта периодической волны, амплитуда при этом остается практически неизменной. Отметим, что форма волны большой амплитуды практически не изменялась в течении расчетного интервала. Расчет в данной реализации прерывался при достижении  $\Delta H/H$  величины  $10^{-6}$ . При этом на порядок увеличивалось значение кривизны поверхности, а углы наклона оставались конечными. Таким образом, проявляется тенденция к опрокидыванию волны меньшей амплитуды.

Проведенные численные эксперименты показали, что на границе жидкости могут формироваться области с высокой кривизной поверхности, в которых может резко увеличиться напряженность электрического поля. Так, рассмотрим столкновение встречных волн значительной отрицательной амплитуды (в отличие от волн с положительной амплитудой, для них происходит укрупнение переднего фронта). Выберем начальные условия (5.20) с  $a^+ = a^- = -0.2$  и  $u_0 = 0$ , что соответствует волнам, исходно совмещенным в пространстве:  $F^+ = F^-$ . Отметим, что в момент  $t = 0$  крутизна волн достигает весьма большого значения  $s \approx 0.69$ . Для параметров расчета положим  $h = 8$ ,  $N = 4096$  и  $\tau = 5 \times 10^{-5}$ .

В следствие того, что скорость в начальный момент равнялась нулю, с течением времени исходный профиль поверхности разделялся на две симметричные волны, бегущие в противоположные стороны. Далее при достижении границы расчетной области ( $x = \pm h/2$ ) волны взаимодействовали друг с другом. На Рисунке 5.8 (а) представлен профиль волны, движущейся налево после одного, трех и пяти столкновений. Можно видеть, что после каждого взаимодействия вершина волны заостряется (в момент времени  $t = 19.05$ ,  $S^- \approx -1.9$ ).

В точках наибольшего заострения значительно увеличивается электрическое поле. Так на Рисунке 5.8 (б) показана плотность энергии электрического поля на границе жидкости. Видно, что к концу расчетного интервала энергия электрического поля локализуется практически в одной точке. Напряженность электрического поля в этой области почти в пять раз превышает значение напряженности внешнего поля (в безразмерных обозначениях она равна единице). Если в момент  $t_1$  (см. подпись к рисунку) обратный якобиан отображения, характеризующий плотность энергии электрического поля, достигал значения  $1/J \approx 6.3$  (на периферии  $1/J \approx 1$ ), то после двух столкновений (момент  $t_2$ ) имеем  $1/J \approx 7.8$ , а еще после двух столкновений (момент  $t_3$ ) уже имеем  $1/J \approx 21.7$ . Наблюдаемая тенденция к локализации энергии поля может приводить к пробоем жидкого диэлектрика. Отметим, что в процессе эволюции крутизна поверхности увеличивалась до экстремально высоких значений  $s \approx 2.9$  (это соответствует углу наклона  $\sim 71^\circ$ ), что, однако, не приводит к сложностям при расчетах в конформных переменных.

На Рисунке 5.9 (а) и (б) представлены крутизна (тангенс угла наклона поверхности) и кривизна поверхности под буквой, соответственно. Из графиков видно, что углы наклона поверхности остаются конечными, хоть и значительно возрастают (примерно в три раза).



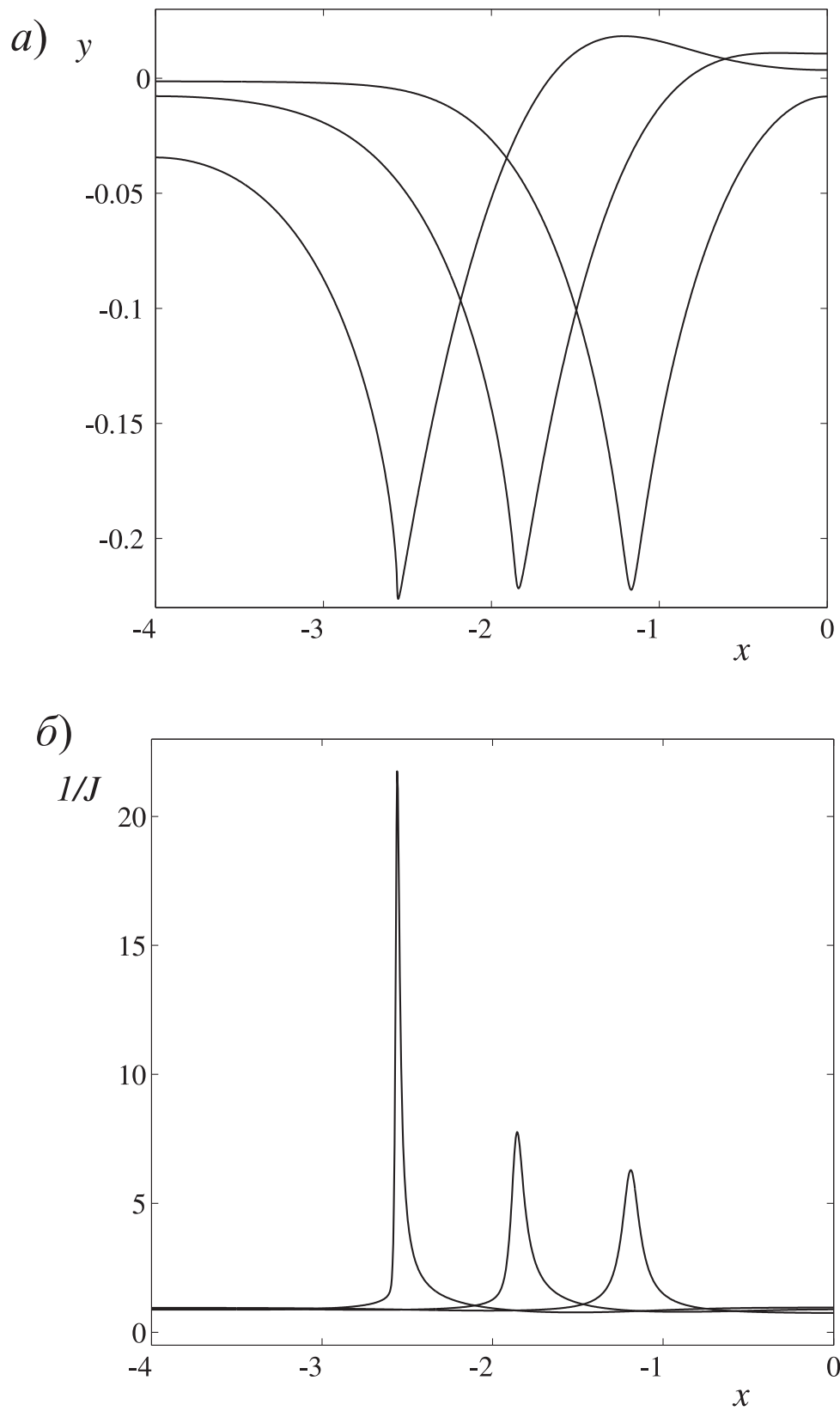


Рисунок 5.8: На верхнем графике показан профиль движущейся налево уединенной волны с  $a^- = -0.2$  после одного, трех и пяти столкновений со встречной волной той же формы; на нижнем — значение напряженности электрического поля в соответствующие моменты времени:  $t = 1.20, 10.10, 19.05$ .

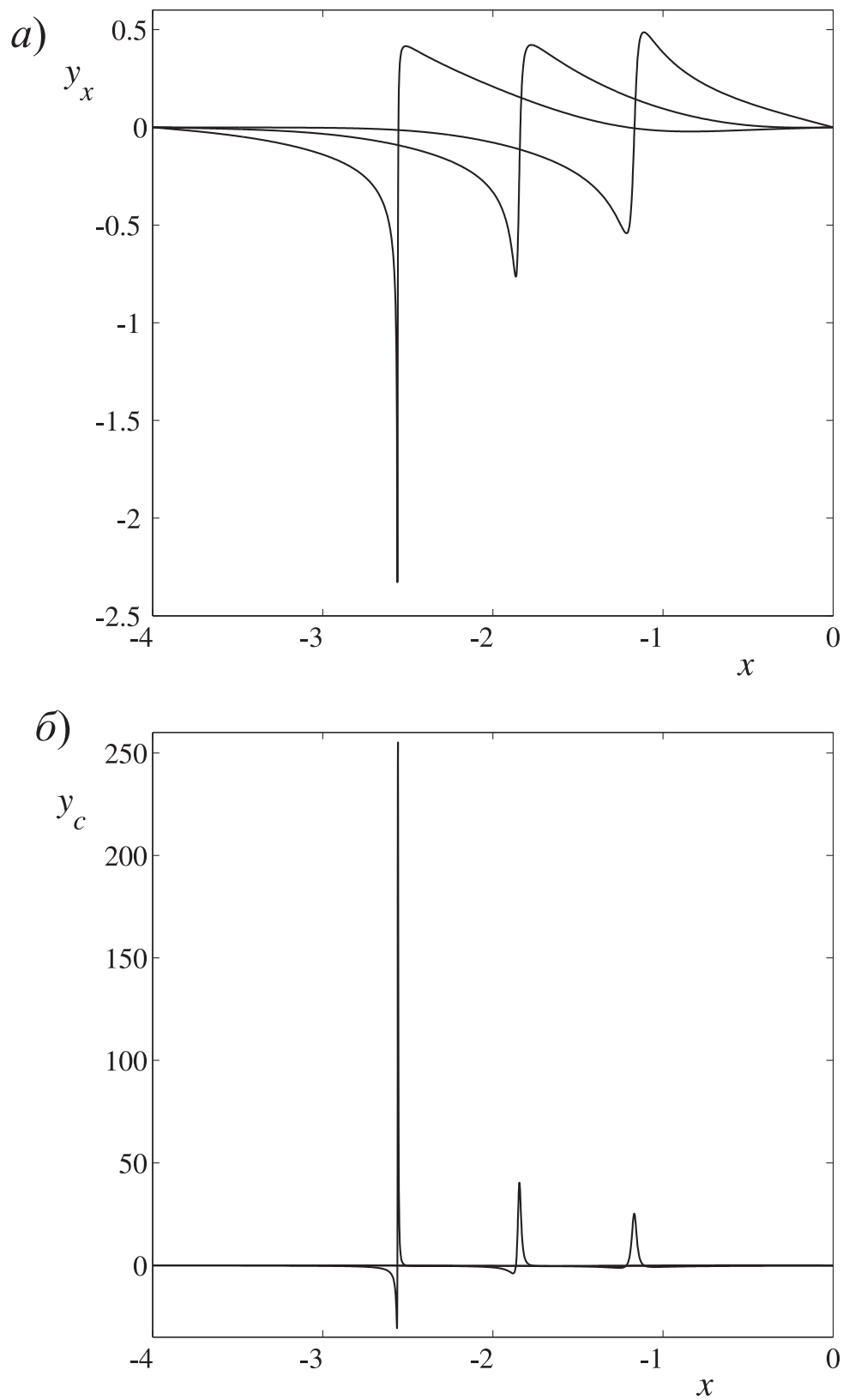


Рисунок 5.9: На верхнем графике показана крутизна, на нижнем — кривизна поверхности  $y_c = y_{xx}(1 + y_x)^{-3/2}$  в соответствующие моменты времени:  $t = 1.20, 10.10, 19.05$ .

Тенденция к формированию особенности наблюдается для кривизны поверхности, максимальное значение которой увеличивается практически на порядок.

## 5.7 Выводы к Главе 5

Проведенное в настоящей главе теоретическое исследование сильно-нелинейной динамики свободной поверхности непроводящей жидкости в горизонтальном электрическом поле привело к следующим новым результатам:

1. Показано, что взаимодействие встречных уединенных волн обладает следующим фундаментальным свойством: энергия и импульс каждой волны остаются неизменными, т.е. взаимодействие волн является упругим.
2. С использованием конформных переменных получены нелинейные интегро-дифференциальные уравнения, описывающие сильно-нелинейную динамику границы жидкости в горизонтальном электрическом поле. На основе спектральных методов разработан и реализован алгоритм численного решения данных уравнений.
3. На примере однократного взаимодействия локализованных волн показано, что существует тенденция к укрупнению их фронтов. Для волн с положительной амплитудой возникает происходит укрупнение заднего фронта, а для волн с отрицательной амплитудой — переднего фронта. Также продемонстрировано, что для волн одинаковой амплитуды степень деформации определяется нелинейностью четвертого порядка, т.е. взаимодействие является слабым.
4. Продемонстрировано, что взаимодействие встречных периодических волн может привести к формированию областей с высокой кривизной поверхности. В особых точках значительно увеличивается концентрация энергии электрического поля. Наблюдаемая тенденция к локализации энергии поля может приводить к пробоем жидких диэлектриков.

Изложенные в настоящей главе научные результаты опубликованы в работах [125, 133, 134].

## Заключение

В диссертации проведено систематическое исследование нелинейной динамики поверхности раздела диэлектрических жидкостей в сильном электрическом поле. Представим основные результаты, полученные в работе:

1. Получены аналитические решения, описывающие формирование слабых корневых особенностей на границе раздела диэлектрических жидкостей в сильном вертикальном электрическом поле. Согласно им кривизна обращается в минус бесконечность для  $\varepsilon_1/\varepsilon_2 > \rho_2/\rho_1$  и в плюс бесконечность для  $\varepsilon_1/\varepsilon_2 < \rho_2/\rho_1$ , амплитуда и углы наклона поверхности остаются конечными.
2. Выявлен особый режим течения жидкостей, для которого потенциалы электрического поля и скорости оказываются линейно зависимыми величинами. Это означает существование такой (в общем случае — неинерциальной) системы координат, в которой жидкости движутся по силовым линиям электрического поля. Реализация данного режима возможна для жидкостей, отношение плотностей которых близко к обратному отношению их проницаемостей, в вертикальных электрическом и гравитационном полях, а также в горизонтальном электрическом поле при наличии тангенциального разрыва скоростей на границе.
3. Продемонстрировано, что слабо-нелинейные стадии развития электрогидродинамической неустойчивости поверхности раздела жидкостей в особом режиме (см. пункт 2) представляют собой процесс так называемого лапласовского роста, для которого характерно формирование острий и пальцеобразных возмущений поверхности.
4. Получен широкий класс точных решений, описывающих слабо-нелинейную динамику периодических, либо локализованных волн на поверхности раздела жидкостей в условии нейтрального равновесия, т.е. когда внешнее горизонтальное электрическое поле

подавляет неустойчивость Кельвина-Гельмгольца. Показано, что уединенные нелинейные волны могут распространяться без искажений вдоль направления электрического поля с постоянной скоростью. Описано взаимодействие данных солитоноподобных возмущений; как оказалось, они могут образовать структурно устойчивый волновой пакет (бризер).

5. Для случая сильного горизонтального электрического поля показано, что волны малой, но конечной амплитуды могут распространяться без искажений вдоль направления внешнего поля по поверхности раздела жидкостей. Подобная ситуация реализуется для жидкостей, отношение плотностей которых близко к отношению их диэлектрических проницаемостей. Описано взаимодействие распространяющихся в противоположных направлениях нелинейных волн; как оказалось, встречные уединенные волны сохраняют свою форму и фазу в результате взаимодействия.
6. Взаимодействие встречных сильно-нелинейных волн на свободной поверхности диэлектрической жидкости с высокой проницаемостью в горизонтальном поле является упругим (энергия и импульс каждой волны сохраняется). Профиль волн в результате взаимодействия незначительно меняется; степень деформации определяется четвертой степенью амплитуды. Многократное взаимодействие волн приводит к формированию областей со значительной плотностью энергии электрического поля на поверхности.

В заключение автор хотел бы выразить искреннюю признательность научному руководителю в.н.с. Н. М. Зубареву за руководство работой и высокую научную требовательность к результатам. Автор также выражает глубокую благодарность зав. ЛНД Н. Б. Волкову и с.н.с. Г. Ш. Болтачеву за постоянное внимание к работе и помощь во многих вопросах. Автор благодарен также всем сотрудникам ЛНД ИЭФ УрО РАН за помощь в работе и интерес к полученным результатам. Автор выражает особую признательность руководству и службам Института электрофизики УрО РАН за создание благоприятных условий для работы.

## Список литературы

- [1] Melcher, J. R. Electrohydrodynamic and magnetohydrodynamic surface waves and instabilities / J. R. Melcher // *Phys. Fluids*. – 1961. – V. 4 – P. 1348.
- [2] Taylor, G. I. The stability of a horizontal fluid interface in a vertical electric field / G. I. Taylor, A. D. McEwan // *J. Fluid Mech.* – 1965. – V. 22. – P. 1-15.
- [3] Melcher, J. R. Interfacial relaxation overstability in a tangential electric field / J. R. Melcher, Jr. W. J. Schwarz // *Physics of Fluids*. – 1968. – V. 11. – P. 2604-2616.
- [4] Melcher, J. R. Field-coupled surface waves / J. R. Melcher. — Cambridge: MIT Press, 1963.
- [5] Захаров, В. Е. Гамильтоновский формализм для нелинейных волн / В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов // *УФН*. – 1997. – Т. 11. – С. 137-167.
- [6] Luke, J. C. A variational principle for a fluid with a free surface / J. C. Luke // *J. Fluid Mech.* – 1967. – V. 27(2). – P. 395-397.
- [7] Tonks, L. A theory of liquid surface rupture by a uniform electric field / L. Tonks // *Phys. Rev.* – 1935. – V. 48. – P. 562-568.
- [8] Френкель, Я. И. К Теории Тонкса о разрыве поверхности жидкости постоянным электрическим полем в вакууме / Я. И. Френкель // *ЖЭТФ*. – 1936. – Т. 6. – В. 4. – С. 347-350.
- [9] Габович, М. Д. Исследование нелинейных волн на поверхности жидкого металла, находящегося в электрическом поле / М. Д. Габович, В. Я. Порицкий // *Письма в ЖЭТФ*. – 1981. – Т. 33. – В. 6. – С. 320-324.
- [10] Шикин, В. Б. Неустойчивость и перестройки заряженной поверхности жидкости / В. Б. Шикин // *УФН*. – 2011. – Т. 181 – В. 12. – С. 1241-1264.

- [11] Хайкин, М. С. Нарушение устойчивости заряженной поверхности жидкого гелия и образование баблонов / М. С. Хайкин, А. П. Володин // УФН. – 1978. – Т. 126 – В. 4. – С. 691-693.
- [12] Шикин, В. Б. Заряды вблизи свободной границы жидкого гелия: коллективные эффекты / В. Б. Шикин // УФН. – 1994. – Т. 164 – В. 9. – С. 995-997.
- [13] Эдельман, В. С. Левитирующие электроны / В. С. Эдельман // УФН. – 1980. – Т. 130. – В.4. – С. 675-705.
- [14] Cole, M. W. Image potential induced surface bands in insulators / M. W. Cole, M. H. Cohen // Phys. Rev. Lett. – 1969. – V. 23. – N. 21. – P. 1238-1241.
- [15] Melcher, J. R. Electrohydrodynamics: a review of the role interfacial shear stresses / J. R. Melcher, G. I. Taylor // Annual Review of Fluid Mechanics. – 1969. – V. 1. – P 111-146.
- [16] Browaeys, J. Surface waves in ferrofluids under vertical magnetic field / J. Browaeys, J.-C. Bacri, C. Flament, S. Neveu, R. Perzynski // Eur. Phys. J. B. – 1999. – V. 9. – P. 335-341.
- [17] Lin, Zh. Electric field induced instabilities at liquid/liquid interfaces / Zh. Lin, T. Kerle, Sh. M. Baker, D. A. Hoagland, E. Schiffer, U. Steiner, T. P. Russell // J. Chem. Phys. – 2001. – V. 114. – P. 2377-2382.
- [18] Жакин, А. И. Электрогидродинамика заряженных поверхностей / А. И. Жакин // УФН. – 2013. – Т. 183. – В. 2. – С. 153-177.
- [19] Жакин, А. И. О нелинейных равновесных формах и нелинейных волнах на поверхности феррожидкости (идеального проводника) в поперечном магнитном (электрическом) поле / А. И. Жакин // Магнитная гидродинамика. – 1983. – Т. 4. – С. 41-48.
- [20] Zahn, M. Contributions of Prof. James R. Melcher to engineering education / M. Zahn, H. A. Haus // Journal of Electrostatics. – 1995. – V. 34. – P. 109-162.
- [21] Taylor, G. Disintegration of water drops in an electric field / G. Taylor // Proceedings of the Royal Society of London. Series A, mathematical and physical sciences. – 1964. – V. 280. – N. 1382. – P. 383-397.

- [22] Maheshwari, S. Anomalous conical menisci under an ac field-departure from the dc Taylor cone / S. Maheshwari, H.-Ch. Chang. // Applied physics letters. – 2006. – V. 89. – P. 234103.
- [23] Sharp, D. H. An overview of Rayleigh-Taylor instability / D. H. Sharp // Physica D. – 1984. – V. 12. – P. 3-10.
- [24] Zaitzev, V. M. Nature of the instability of the interface between two liquids in a constant field / V. M. Zaitzev, M. I. Shliomis // Sov. Phys. Dokl. – 1970. V. 14. – N. 10. – P. 1001-1002.
- [25] Кузнецов, Е. А. О существовании гексагонального рельефа на поверхности жидкого диэлектрика во внешнем электрическом поле / Е. А. Кузнецов, М. Д. Спектор // ЖЭТФ. – 1976. – Т. 71. – В. 1(7). – С. 262-272.
- [26] Gor'kov, L. P. Mode of stability loss of charged helium surface / L. P. Gor'kov, D. M. Chernikova // Sov. Phys. Dokl. – 1976. – V. 21(6). – P. 328-330.
- [27] Zhakin, A. I. Nonlinear equilibrium forms and nonlinear waves on the surface of a ferroliquid (ideal conductor) in a transverse magnetic (electric) field / A. I. Zhakin // Magnetohydrodynamics. – 1983. – V. 19. – P. 381-387.
- [28] Zhakin, A. I. Nonlinear waves on the surface of a charged liquid. Instability, bifurcation, and nonequilibrium shapes of the charged surface / A. I. Zhakin // Fluid Dynamics. – 1984. – V. 19. – P. 422-430.
- [29] Easwaran, C. V. Solitary waves on a conducting fluid layer / C. V. Easwaran, // Phys. Fluids. – 1998. – V. 31. – P. 3442.
- [30] González, A. Korteweg-de Vries-Burgers equation for surface waves in nonideal conducting liquids / A. González, A. Castellanos // Phys. Rev. E. – 1994. – V. 49. – P. 2935.
- [31] González, A. Nonlinear waves in a viscous horizontal film in the presence of an electric field / A. González, A. Castellanos // J. Electrostat. – 1997. – V. 40-41. – P. 55.
- [32] Thaokar, R. M. Electrohydrodynamic instability of the interface between two fluids confined in a channel / R. M. Thaokar, V. Kumaran // Phys. Fluids. – 2005. – V. 17. – P. 084104.



- [33] Papageorgiou D. T., Gravity capillary waves in fluid layers under normal electric fields / D. T. Papageorgiou, P. G. Petropoulos, J.-M. Vanden-Broeck // *Phys. Rev. E.* – 2005. – V. 72. – P. 051601.
- [34] Gleeson, H. A new application of the Kortweg - de Vries Benjamin-Ono equation in interfacial electrohydrodynamics / H. Gleeson, P. Hammerton, D. T. Papageorgiou, J.-M. Vanden-Broeck // *Phys. Fluids.* – 2007. – V. 19. – P. 031703.
- [35] Жакин, А. И. Ионная электропроводность и комплексообразование в жидких диэлектриках / А. И. Жакин // *УФН.* – 2013. – Т. 173. – С. 51-68.
- [36] Mima, K. Propagation of nonlinear waves on an electron-charged surface of liquid helium / K. Mima, H. Ikezi // *Phys. Rev. B.* – 1978. – V. 17. – P. 3567.
- [37] Mohamed, A. A. Nonlinear electrohydrodynamic Rayleigh-Taylor instability. Part 1. A perpendicular field in the absence of surface charges / A. A. Mohamed, E. F. Elshehawey // *J. Fluid Mech.* – 1983. – V. 129. – P. 473.
- [38] Elhefnawy, A. R. F. Interfacial stability and nonlinear properties of electrohydrodynamics / A. R. F. Elhefnawy // *Int. J. Eng. Sci.* – 1996. – V. 34. – P. 1385.
- [39] El-Sayed, M. F. Nonlinear EHD stability of the interfacial waves of two superposed dielectric fluids / M. F. El-Sayed, D. K. Callebaut // *J. Colloid Interf. Sci.* – 1998. – V. 200. – P. 203
- [40] Зубарев, Н. М. Динамика свободной поверхности проводящей жидкости в околокритическом электрическом поле / Н. М.Зубарев, О. В.Зубарева // *ЖТФ.* – 2001. – Т. 71. – В. 7. – С. 21.
- [41] Elhefnawy, A. R. F. Nonlinear electrohydrodynamic instability of two liquid layers / A. R. F. Elhefnawy // *Int. J. Eng. Sci.* – 2002. – V. 40. – P. 319.
- [42] El-Sayed, M. F. Nonlinear analysis and solitary waves for two superposed streaming electrified fluids of uniform depths with rigid boundaries / M. F. El-Sayed // *Arch. Appl. Mech.* – 2008. – V. 78. – P. 663.
- [43] Шикин, В. Б. Неустойчивость и перестройки заряженной поверхности жидкости / В. Б. Шикин // *УФН.* – 2011. – Т. 181. – С. 1241-1264.

- [44] Singla, R. K. Second harmonic resonance on the marginally neutral curve in electrohydrodynamics / R. K. Singla, R. K. Chhabra, S. K. Trehan // *Int. J. Eng. Sci.* – 1997. – V. 35. – P. 585.
- [45] Berning, M. A weakly nonlinear theory for the dynamical Rayleigh-Taylor instability / M. Berning, A. M. Rubenchik // *Phys. Fluids.* – 1998. – V. 10. – P. 1564.
- [46] Baker, G. Singularity formation during Rayleigh-Taylor instability / G. Baker, R. E. Caflisch, M. Siegel // *J. Fluid Mech.* – 1993. – V. 252. – P. 51.
- [47] Yoshikawa, T. Dynamics of strongly nonlinear fingers and bubbles of the free surface of an ideal fluid / T. Yoshikawa // *Physica D.* – 2011. – V. 152-153. – P. 451.
- [48] Cushman-Roisin, B. *Environmental fluid mechanics* / B. Cushman-Roisin – New York: John Wiley and Sons, Inc, 2013.
- [49] El-Sayed, M.F. Electro-aerodynamic instability of a thin dielectric liquid sheet sprayed with an air stream / M. F. El-Sayed // *Phys. Rev. E.* – 1999. – V. 60. – P. 7588-7591.
- [50] Elhefnawy, A. R. F. Nonlinear electrohydrodynamic Kelvin-Helmholtz instability under the influence of an oblique electric field / A. R. F. Elhefnawy // *Physica A.* – 1992. – V. 182. – P. 419-435.
- [51] Barannyk, L. L. Suppression of Rayleigh-Taylor instability using electric fields / L. L. Barannyk, D. T. Papageorgiou, P. G. Petropoulos // *Mathematics and Computers in Simulation.* – 2012. – V. 82. – P. 1008-1016.
- [52] Коровин, В. М. Влияние тангенциального электрического поля на развитие рэлей-тейлоровской неустойчивости пленки диэлектрической жидкости / В. М. Коровин // *ЖТФ.* – 2011. – Т. 81. – В. 10. – С. 12-19.
- [53] Tilley, B. S. Dynamics and rupture of planar electrified liquid sheets / B. S. Tilley, P. G. Petropoulos, D. T. Papageorgiou // *Phys. Fluids.* – 2001. – V. 13. – P. 3547-3563.
- [54] Papageorgiou, D. T. Large-amplitude capillary waves in electrified fluid sheets / D. T. Papageorgiou, J.-M. Vanden-Broeck // *J. Fluid Mech.* – 2004. – V. 508. – P. 71-88.

- [55] Ozen, O. Nonlinear stability of a charged electrified viscous liquid sheet under the action of a horizontal electric field / O. Ozen, D. T. Papageorgiou, P. G. Petropoulos // *Phys. Fluids*. – 2006. – V. 18. – P. 042102.
- [56] Grandison, S. Interfacial capillary waves in the presence of electric fields / S. Grandison, D. T. Papageorgiou, J.-M. Vanden-Broeck // *Eur. J. Mech. B Fluids*. – 2007. – V. 26. – P. 404-421.
- [57] Savettaseranee, K. The effect of electric fields on the rupture of thin viscous films by van der Waals forces/ K. Savettaseranee, D. T. Papageorgiou, P. G. Petropoulos, B. S. Tilley // *Phys. Fluids*. – 2003. – V. 15. – P. 641.
- [58] Papageorgiou D. T. Antisymmetric capillary waves in electrified fluid sheets / D. T. Papageorgiou, J.-M. Vanden-Broeck // *Eur. J. Appl. Math.* – 2004. – V. 15. – P. 609.
- [59] Kinnersley, W. Exact large amplitude capillary waves on sheets of fluid / W. Kinnersley // *J. Fluid Mech.* – 1976. – V. 77. – 229.
- [60] Zubarev, N. M. Formation of root singularities on the free surface of a conducting fluid in an electric field / N. M. Zubarev // *Phys. Lett. A*. – 1998. – V. 243. – P. 128.
- [61] Зубарев, Н. М. Формирование особенностей на поверхности жидкого металла в сильном электрическом поле / Н. М. Зубарев // *ЖЭТФ*. – 1998. – Т. 114. – В. 6(12). – С. 2043-2054.
- [62] Zubarev, N. M. Charged-surface instability development in liquid helium: An exact solution/ N. M. Zubarev // *JETP Lett.* – 2000. – V. 71. – P. 367.
- [63] Zubarev, N. M. Exact solutions of the equations of motion of liquid helium with a charged free surface / N. M. Zubarev // *JETP*. – 2002. – V. 94. – P. 534.
- [64] Зубарев, Н. М. Нелинейные волны на поверхности диэлектрической жидкости в горизонтальном электрическом поле в 3D геометрии; точные решения / Н.М. Зубарев // *Письма в ЖЭТФ*. – 2009. – Т. 89. – В. 6. – С. 317-321.

- [65] Zubarev, N. M. Propagation of large-amplitude waves on dielectric liquid sheets in a tangential electric field: Exact solutions in three-dimensional geometry / N. M. Zubarev, O. V. Zubareva // *Phys. Rev. E*. – 2010. – V. 82. – art. no. 046301.
- [66] Zubarev, N. M. Nonlinear waves on the surface of a dielectric liquid in a strong tangential electric field / N. M. Zubarev // *Phys. Lett. A*. – 2004. – V. 333. – P. 284-288.
- [67] Зубарев, Н. М. Бездисперсионное распространение волн конечной амплитуды по поверхности диэлектрической жидкости в тангенциальном электрическом поле / Н. М. Зубарев, О. В. Зубарева // *Письма в ЖТФ*. – 2006. – Т. 32. – В. 20. – С. 40-44.
- [68] Захаров, В. Е. Устойчивость периодических волн конечной амплитуды на поверхности глубокой жидкости / В. Е. Захаров // *ПМТФ*. – 1968. – Т. 2. – С. 86-94.
- [69] Miles, J. W. Hamiltonian formulations for surface waves / J. W. Miles // *Applied Scientific Research*. – 1981. – V. 37. – P. 103-110.
- [70] Zubarev, N. M. Nonlinear dynamics of the interface of dielectric liquids in a strong electric field: Reduced equations of motion / N. M. Zubarev // *Phys. Fluids*. – 2006. – V. 18. – P. 028103.
- [71] Зубарев, Н. М. Точные частные решения для динамики поверхности диэлектрической жидкости с заряженной поверхностью в поле тяжести / Н. М. Зубарев, О. В. Зубарева, Г. А. Рув // *ЖТФ*. – 2010. – Т. 80. – В. 7. – С. 153-154.
- [72] Alfven, H. Existence of Electromagnetic-Hydrodynamic Waves / H. Alfven // *Nature*. – 1942. – V. 150. – P. 405-406.
- [73] Паркер, Е. Космические магнитные поля. Их образование и проявления / Е. Паркер. – Москва: Мир, 1982.
- [74] Chandrasekhar, S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability / S. Chandrasekhar. – Oxford: Clarendon Press, 1961. – P. 551.
- [75] Goldreich, P. Toward a theory of interstellar turbulence. II strong Alfenic turbulence / P. Goldreich, S. Sridhar // *The Astrophysical journal*. – 1995. – V. 438. – P. 763-775.

- [76] Goldreich P., Sridhar S. Magnetohydrodynamic turbulence revisited / P. Goldreich, S. Sridhar // The Astrophysical journal. – 1997. – V. 485. – P. 680-688.
- [77] Овсянников, Л. В. К обоснованию теории мелкой воды / Л. В. Овсянников // Динамика сплошной среды. Сб. науч. тр. СО АН СССР. Новосибирск: Ин-т гидродинамики. – 1973. – В. 15. – С. 104-125.
- [78] Дьяченко, А. И. Нелинейная динамика свободной поверхности идеальной жидкости / А. И. Дьяченко, В. Е. Захаров, Е. А. Кузнецов // Физика плазмы. – 1999. – Т. 22. – В. 10. – С. 916-928.
- [79] Дьяченко, А. И. О динамике идеальной жидкости со свободной поверхностью / А. И. Дьяченко // Докл. АН. – 2001. – Т.376. – В. 1. – С.27-29.
- [80] Zakharov, V. E. New method for numerical simulation of a nonstationary potential flow of incompressible fluid with a free surface / V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko, O. A. Vasilyev // Eur. J. Mech. B Fluids. – 2002. – V. 21. – P. 283-291.
- [81] Dyachenko, A. I. Analytical description of the free surface dynamics of an ideal fluid (canonical formalism and conformal mapping) / A. I. Dyachenko, E. A. Kuznetsov, M. D. Spector, V. E. Zakharov // Phys. Let. A. – 1996. – V. 221. – P. 73-79.
- [82] Chalikov, D. Modeling of Extreme Waves Based on Equations of Potential Flow with a Free Surface / D.Chalikov, D. Sheinin // J. Comp. Phys. – 2005. – V.210. – P.247-273.
- [83] Ruban, V. P. Water waves over a time-dependent bottom: Exact description for 2D potential flows / V. P. Ruban // Phys. Let. A. – 2005. – V. 340. – N. 1-4. – P. 194-200.
- [84] Шамин, Р. В. Динамика идеальной жидкости со свободной поверхностью в конформных переменных / Р. В. Шамин // Современная математика. Фундаментальные исследования. – 2008. – Т. 28. – С. 3-144.
- [85] Шамин Р. В. Об оценке времени существования решений уравнения, описывающего поверхностные волны // Докл. АН. – 2008. – Т. 418 (5). – С. 603-604.

- [86] Зубарев, Н. М. Формирование особенностей на заряженной поверхности слоя жидкого гелия конечной глубины / Н. М. Зубарев // ЖЭТФ. – 2008. – Т. 134. – В. 4(10). – С. 779-790.
- [87] Tao, B. Fully nonlinear capillary-gravity wave patterns under the tangential electric field / B. Tao, D. L. Guo // Computers and Mathematics with Applications. – 2014. – V. 67. – P. 627-635.
- [88] Kuznetsov, E. A. Surface singularities of ideal fluid / E. A. Kuznetsov, M. D. Spector, V. E. Zakharov // Phys. Lett. A. – 1993. – V. 182. – P. 387.
- [89] Шутов, А. А. Форма капли в постоянном электрическом поле / А. А. Шутов // ЖТФ. – 2002. Т. 72. – В. 12. – С. 15-22.
- [90] Шлиомис, М. И. Магнитные жидкости / М. И. Шлиомис // УФН. – 1974. – Т. 112. – С. 427.
- [91] Rosensweig, R. E. Ferrohydrodynamics / R. E. Rosensweig. – New York: Cambridge University Press, 1985.
- [92] Kaiser, R. Study of ferromagnetic liquid / R. Kaiser, R.E. Rosensweig. – Washington: AVCO Corp., 1969.
- [93] Joshi, A. S. Kelvin-Helmholtz instability in viscoelastic fluids in presence of electro-magnetic field / A. S. Joshi, M. C. Radhakrishna, N. Rudrariah // Phys. Fluids. – 2011. – V. – 23. P. 094107.
- [94] Sunil, Effect of Magnetic-Field-Dependent Viscosity on a Rotating Ferromagnetic Fluid Heated and Solute from Below, Saturating a Porous Medium / Sunil, Divya, R. S. Sharma // Journal of Porous Media. – 2005. – V. 8. – N. 6. – P. 569-588.
- [95] Moore, D. W. The Spontaneous Appearance of a Singularity in the Shape of an Evolving Vortex Sheet / D. W. Moore // Proc. R. Soc. Lond. A. – 1979. – V. 365. – P. 105.
- [96] Kochurin, E. A. Reduced equations of motion of the interface of dielectric liquids in vertical electric and gravitational fields / E. A. Kochurin, N. M. Zubarev // Phys. Fluids. – 2012. – V. 24. – P. 072101.

- [97] Зубарев, Н. М. Нелинейная динамика поверхности раздела диэлектрических жидкостей в вертикальных электрическом и гравитационном полях / Н. М. Зубарев, Е. А. Кочурин // Письма в ЖТФ. – 2011. – Т. 37. – В. 20.
- [98] Kochurin, E. A. Formation of curvature singularities on the interface between dielectric liquids in a strong vertical electric field / E. A. Kochurin, N. M. Zubarev, O. V. Zubareva // Phys. Rev. E. – 2013. – V. 88. – I. 2. – P. 023014.
- [99] Зубарев, Н. М. Эволюция поверхности раздела диэлектрических жидкостей в вертикальном электрическом поле / Н. М. Зубарев, Е. А. Кочурин // Материалы X Международной конференции — Волновая электрогидродинамика проводящей жидкости. – 2013 – С. 85-89.
- [100] Kochurin, E. A. Formation of singularities on the interface of dielectric liquids in a strong vertical electric field / E. A. Kochurin, N. M. Zubarev // Proceedings of VI International conference — SOLITONS, COLLAPSES AND TURBULENCE: Achievements, Developments and Perspectives. – 2012. – P. 143-144.
- [101] Зубарев, Н. М. Формирование особенностей на поверхности раздела диэлектрических жидкостей в вертикальном электрическом поле / Н. М. Зубарев, Е. А. Кочурин // Сборник докладов X Международной научной конференции — Современные проблемы электрофизики и электрогидродинамики жидкостей. – 2012. – С. 214-216.
- [102] Ландау, Л. Д. Электродинамика сплошных сред / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, – Москва: Наука, 1982. – 624 с.
- [103] Bensimon, D. Viscous flows in two dimensions/ D. Bensimon, L. P. Kadanoff, Sh. Liang, B. I. Shraiman, and Ch. Tang // Rev. Mod. Phys. – 1985. – V. 58. – P. 977.
- [104] Langer, J. S. Instabilities and pattern-formation in crystal-growth / J. S. Langer // Rev. Mod. Phys. – 1980. – V. 52. – P. 1.
- [105] Matsushita, M. Fractal structures of zinc metal leaves grown by electrodeposition / M. Matsushita, M. Sano, Y. Hayakawa, H. Honjo, Y. Sawada // Phys. Rev. Lett. – 1984. – V. 53. – P. 286.

- [106] Saffman, P. G. The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid / P. G. Saffman, G. I. Taylor // Proc. R. Soc. London, Ser. A. – 1958. – V. 245. – P. 312.
- [107] Galin, L. A. Unsteady filtration with a free surface / L. A. Galin // Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R. – 1945. – V. 47. – P. 246.
- [108] Polubarinova-Kochina, P. Ya. On the motion of the oil contour”/ P. Ya. Polubarinova-Kochina // Dokl. Akad. Nauk S.S.S.R. – 1945. – V. 47. – P. 254.
- [109] Polubarinova-Kochina, P. Ya. Concerning unsteady motions in the theory of filtration / P. Ya. Polubarinova-Kochina // Prikl. Mat. Mekh. – 1945. – V. 9. – P. 79.
- [110] Howison, S. D. Cusp development in Hele-Shaw flow with a free-surface / S. D. Howison // SIAM J. Appl. Math. – 1986. – V. 46. – P. 20.
- [111] Mineev, M. B. A finite polynomial solution of the two-dimensional interface dynamics / M. B. Mineev // Physica D. – 1990. – V. 43. – P. 288.
- [112] Mineev-Weinstein, M. B. Class of nonsingular exact solutions for Laplacian pattern formation / M. B. Mineev-Weinstein, S. P. Dawson // Phys. Rev. E. – 1994. – V. 50. – P. 24.
- [113] Dawson, S. P. Dynamics of closed interfaces in two-dimensional Laplacian growth / S. P. Dawson, M. Mineev-Weinstein // Phys. Rev. E. – 1998. – 57. – P. 3063.
- [114] Зубарев, Н. М. Нелинейная динамика поверхности раздела диэлектрических жидкостей в сильном вертикальном электрическом и гравитационном полях / Н. М. Зубарев, Е. А. Кочурин // Материалы ВНКСФ -XVII. – 2011. – С. 262.
- [115] Кочурин, Е. А. Неустойчивость поверхности раздела диэлектрических жидкостей в вертикальном электрическом поле; редукция уравнений движения / Е. А. Кочурин, Г. Ш. Болтачев, Н. М. Зубарев, Н. М. Руев // Труды XVII Зимней школы по механике сплошных сред. – 2011. – С. 182.



- [116] Зубарев, Н. М. Нелинейная динамика поверхности раздела диэлектрических жидкостей в вертикальном электрическом поле / Н. М. Зубарев, Е. А. Кочурин // Тезисы докладов СПФКС-11. – 2010. – С. 206.
- [117] Drazin, P. G. Kelvin-Helmholtz instability of finite amplitude / P. G. Drazin // J. Fluid Mech. – 1970. – V. 42 (2). – P 321-335.
- [118] Zhdanov, S. K. Quasigas approximation in treating electron-beam bunching in a plasma and the tangential discontinuity in hydrodynamics / S. K. Zhdanov, B. A. Trubnikov // JETP. – 1995. – V. 108. – P. 614-630.
- [119] Kuznetsov, E. A. Nonlinear theory of the excitation of waves by a wind due to the Kelvin-Helmholtz instability / E. A. Kuznetsov, P. M. Lushnikov // JETP. – 1995. – V. 108. – P. 614-630.
- [120] Зубарев, Н. М. Трехмерные нелинейные волны на границе раздела диэлектрических жидкостей во внешнем горизонтальном электрическом поле / Н. М. Зубарев, Е. А. Кочурин // ПМТФ. – 2013. – Т. 54(2). – С 52-58.
- [121] Зубарев, Н. М. Стабилизация неустойчивости Кельвина-Гельмгольца внешним тангенциальным электрическим полем / Н. М. Зубарев, Е. А. Кочурин // Тезисы докладов СПФКС-12. – 2011. – С. 157.
- [122] Kochurin, E. A. Nonlinear stages of Kelvin-Helmholtz instability suppressed by tangential electric field / E. A. Kochurin, N. M. Zubarev // Proceedings of the 4th International Conference on Nonlinear Dynamics (ND-KhPI2013). – 2013. – P. 259-264.
- [123] Зубарев, Н. М. Хаотическая динамика локализованных возмущений на границе раздела диэлектрических жидкостей в горизонтальном электрическом поле / Н. М. Зубарев, Е. А. Кочурин // Тезисы докладов СПФКС-12. – 2011. – С. 156.
- [124] Зубарев, Н. М. Нелинейная динамика поверхности раздела диэлектрических жидкостей в сильном горизонтальном электрическом поле / Н. М. Зубарев, Е. А. Кочурин // Тезисы докладов XVI научной школы "Нелинейные волны -2012". – 2012. – С. 76-77.

- [125] Зубарев, Н.М. Нелинейные волны на поверхности раздела жидких диэлектриков в сильном горизонтальном электрическом поле / Н.М. Зубарев, Е.А. Кочурин // Тезисы докладов СПФКС-13. – 2012. – С. 225.
- [126] Зубарев, Н. М. Нелинейная динамика поверхности раздела магнитных жидкостей в горизонтальном магнитном поле при наличии горизонтального разрыва скоростей / Н. М. Зубарев, Е. А. Кочурин // Сборник тезисов докладов Российской конференции по магнитной гидродинамике. – 2012. – С. 45.
- [127] Dyachenko, A. I. Nonlinear dynamics of the free surface of an ideal fluid / A. I. Dyachenko, V. E. Zakharov, E. A. Kuznetsov // Plasma Phys. Rep. – 1996. – V. 22. – P. 829.
- [128] Zakharov, V. E. High-Jacobian approximation in the free surface dynamics of an ideal fluid / V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko // Physica D. – 1996. – V. 98. – P. 652-664.
- [129] Zakharov, V. E. Free-Surface Hydrodynamics in the conformal variables / V. E. Zakharov, Dyachenko A. I. [Электронный ресурс] / V. E. Zakharov, A. I. Dyachenko // arXiv. – 2012. – Режим доступа: <http://arxiv.org/abs/1206.2046>.
- [130] Dyachenko A. I. On the formation of freak waves on the surface of deep water / A. I. Dyachenko, V. E. Zakharov // JETP Letters. – 2008. – V. 88 (5). – P. 356-359.
- [131] Dhatt, G. Finite Element Method / G. Dhatt, E. Lefrancois, G. Touzo. – Wiley: John Wiley & Sons, 2012.
- [132] LeVeque, R. J. Finite Difference Methods for Ordinary and Partial Differential Equations / R. J. LeVeque. – Philadelphia: (SIAM), 2007.
- [133] Зубарев, Н. М. Моделирование сильно-нелинейной динамики свободной поверхности жидкого диэлектрика, находящегося в сильном горизонтальном электрическом поле / Н. М. Зубарев, Е. А. Кочурин, Е. А. Чингина // Тезисы докладов СПФКС-14. – 2013. – С. 196.
- [134] Зубарев, Н. М. Взаимодействие сильно нелинейных волн на свободной поверхности непроводящей жидкости в горизонтальном электрическом поле / Н. М. Зубарев, Е. А. Кочурин // Письма в ЖЭТФ. – 2014. – Т. 99. – В. 11. – С. 729-734 .